Capítulo 2

Campos vectoriales

2.1. Unidades Naturales

Las *unidades naturales* son unidades físicas de medida definidas en términos de constantes físicas universales [18]. El primer conjunto consiste de unidades naturales, las *unidades de Planck* [19], fue formulado por el propio Planck después de establecer la última constante universal, que lleva su nombre. En palabras de Planck

> ...ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten und welche daher als »natürliche Maßeinheiten bezeichnet werden können...
>
> ...These necessarily retain their meaning for all times and for all civilizations, even extraterrestrial and non-human ones, and can therefore be designated as "natural units"...

De este modo, las unidades naturales son naturales debido a que el origen de su definición proviene solo de propiedades de la naturaleza y no de alguna construcción humana. A diferencia de otros conjuntos de unidades naturales las unidades de Planck donde

$$G_N = 1, \qquad \hbar = 1, \qquad c = 1, \qquad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1, \qquad k = 1, \tag{2.1}$$

están basadas sólo en las propiedades del espacio libre, y no en las propiedades (tales como carga, masa, tamaño o radio) de algún objeto o partícula elemental.

Las constantes físicas que suelen normalizarse a se escogen del conjunto dado por la ec. (2.1) y

$$e, \qquad m_e, \qquad m_p. \tag{2.2}$$

Constantes físicas adimensionales como la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \tag{2.3}$$

no pueden tomar un valor numérico diferente sin importar el sistema de unidades que se use. De modo que no se puede tener un sistema de unidades que normalice todas las contanstes físicas presentes en α. Sólo 3 de las cuatro constantes e, $\hbar$, ϵ_0 y c pueden ser normalizadas, y la otra queda dependiendo del valor de α.

MKS	MPU
$1\,\mathrm{s}$	$\dfrac{\hbar}{6.582\ 118\ 99(16)\times 10^{-25}}\,\mathrm{GeV}^{-1}$
$1\,\mathrm{m}$	$\dfrac{\hbar c}{1.973\ 269\ 631(49)\times 10^{-16}}\,\mathrm{GeV}^{-1}$
$1\,\mathrm{kg}$	$5.609\ 589\ 12(42)\,\mathrm{GeV}/c^2$
$1\,\mathrm{K}$	$8.617\ 343(15)\times 10^{-14}/k\,\mathrm{GeV}$

Tabla 2.1: MKS to MPU

El propósito de las unidades naturales es simplificar las expresiones algebraicas que aparecen en las leyes físicas.

El sistema de unidades naturales que usaremos es el de las Unidades de Planck Modificadas (MPU)

$$G_N = 1, \qquad \hbar = 1 \qquad c = 1, \qquad \epsilon_0 = 1, \qquad k = 1, \tag{2.4}$$

de modo que

$$e = \sqrt{4\pi\alpha}, \qquad \text{or} \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \tag{2.5}$$

Teniendo en cuenta que [22]

$$c = 299\ 792\ 450\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad \text{(exact)} \tag{2.6}$$

podemos obtener la relación entre el tiempo y la energía de

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\ 571\ 68(53)\times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} = 6.582\ 118\ 99(16)\times 10^{-25}\,\mathrm{GeV\,s}, \tag{2.7}$$

donde se ha usado que $1\,\mathrm{eV} = 1.602\ 176\ 487(40)\times 10^{-19}\,\mathrm{J}$. Podemos obtener la relación entre longitud y energía a partir de

$$\hbar c = 1.973\ 269\ 631(49)\times 10^{-16}\,\mathrm{GeV\,m}. \tag{2.8}$$

La relación ente masa y energía se puede obtener a partir de una masa bien medida, por ejemplo

$$m_p = 0.938\ 272\ 013(23)\,\mathrm{GeV}/c^2 = 1.672\ 621\ 637(83)^{-27}\,\mathrm{kg}. \tag{2.9}$$

Similarmente para la relación entre temperatura y energía, tenemos de la constante de Boltzman

$$k = 1.380\ 6504(24)\times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}} = 8.617\ 343(15)\times 10^{-14}\,\mathrm{GeV\,K^{-1}}. \tag{2.10}$$

Los factores de conversión del sistema MKS a MPU están dados en la Tabla 2.1 después de hacer $\hbar = c = k = 1$

Ejemplo, de

$$G_N = 6.674\ 28(67)\times 10^{-11}\mathrm{m^3kg^{-1}\,s^{-2}} = 6.70881(65)\times 10^{-39}\hbar c(\mathrm{GeV}/c^2)^{-2} \tag{2.11}$$

entonces

$$M_p \equiv 1.2209\times 10^{19}\mathrm{GeV}/c^2 = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 2.1765\times 10^{-8}\,\mathrm{kg} \tag{2.12}$$

Además, como la longitud esta en GeV^{-1}

$$
\begin{aligned}
L_p \equiv \frac{a}{M_p} &= a\frac{c^2}{1.2209\times 10^{19}\,\mathrm{GeV}} \\
&= a\frac{c^2}{1.2209\times 10^{19}}\,\mathrm{GeV}^{-1}\times\frac{1.973\,269\,631\times 10^{-16}\mathrm{m}/(\hbar c)}{\mathrm{GeV}^{-1}} \\
&= 1.6163\times 10^{-35}\,\mathrm{m}\times\ a\frac{c}{\hbar}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

de modo que $a=\hbar/c$ y

$$
L_p=\frac{a}{M_p}=\frac{\hbar}{c\,M_p}=\frac{\hbar}{c}\sqrt{\frac{G_N}{\hbar c}}=\sqrt{\frac{\hbar\,G_N}{c^3}}=1.6163\times 10^{-35}\,\mathrm{m} \tag{2.14}
$$

Finalmente, el tiempo de Planck es

$$
t_P\equiv\frac{L_p}{c}=\sqrt{\frac{\hbar\,G_N}{c^5}}=5.3912\times 10^{-44}\,\mathrm{s} \tag{2.15}
$$

y

$$
T_p\equiv\frac{M_pc^2}{k}=\sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N\,k^2}}=1.4168\times 10^{32}\,\mathrm{K} \tag{2.16}
$$

Este análisis dimensional muestra que la longitud de Planck corresponde a una escala a la cual los efectos gravitacionales llegan a ser importantes, es decir, que la intensidad del potencial gravitacional es del orden de la masa de la partícula que lo genera

$$
V=G_N\frac{M_p^2}{L_p}=G_N\frac{\hbar c}{G_N}\frac{\hbar M_p}{c}=M_pc^2 \tag{2.17}
$$

Para el caso del un par de protones separados una longitud, $L_{\mathrm{proton}}=\hbar/(cm_p)\approx 2.1\times 10^{-16}\,\mathrm{m}$

$$
V=G_N\frac{m_p^2}{L_{\mathrm{proton}}}=G_Nm_p^3\frac{c}{\hbar}=\frac{G_N}{\hbar c}m_p^3c^2=\frac{m_p^2}{M_p^2}m_pc^2\approx 10^{-38}m_pc^2 \tag{2.18}
$$

y en este caso la energía potencial gravitacional es mucho menor que la masa de la partícula y por consiguiente es despreciable [1]

De la constante de Fuerza electrostática $K=1/(4\pi\epsilon_0)$, podemos obtener el valor de la constante de estructura fina electromagnética $\alpha=e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$

[1] This is shown using dimensional analysis, much in the same way as the Bohr radius, beyond which the full quantum mechanical description of the Hydrogen atom cannot be neglected. Note that the Bohr radius was derived before a modern quantum mechanical treatment of Hydrogen became available. A similar statement can be made about the Planck length [21].

$$
\begin{aligned}
K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx & \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \mathrm{C}^{-2}\mathrm{N m}^2 = \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \mathrm{C}^{-2}\mathrm{Kg\,m}^3\mathrm{s}^{-2} \\
\approx & \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \mathrm{C}^{-2} \times 5.6096 \times 10^{26}\mathrm{GeV} \times (5.068 \times 10^{15}\mathrm{GeV}^{-1})^3 \\
& \times (1.519 \times 10^{-24}\mathrm{GeV}^{-1})^{-2} \times \frac{(\hbar c)^3 \hbar^{-2}}{c^2} \\
\approx & 2.84 \times 10^{35}\mathrm{C}^{-2}\hbar c \\
\approx & 2.84 \times 10^{35}\mathrm{C}^{-2} \times \left(\frac{1.602 \times 10^{-19}}{e^2}\right)^2 \hbar c \\
= & \frac{7.296 \times 10^{-3}}{e^2}\hbar c
\end{aligned}
$$

Definimos la cantidad adimensional α, como

$$
\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.296 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}
$$

Resulta ser una cantidad adimensional que depende de cuatro constantes naturales $e, \epsilon_0, \hbar, c$. Las unidades naturales están definidas a partir de fijar 3 de esas constantes a 1, y dejar la otra dependiendo de α. En términos de las MPU

$$
\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \tag{2.19}
$$

2.2. Notación relativista

Las transformaciones de Lorentz se definen como la transformaciones que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$
a^2 = g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu \equiv a_\nu a^\nu = {a^0}^2 - a^i a^i = {a^0}^2 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \tag{2.20}
$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ y se asume suma sobre índices repetidos. Además

$$
a_\nu \equiv g_{\mu\nu}a^\mu \tag{2.21}
$$

Finalmente la métrica usada se define como

$$
\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.22}
$$

donde $\{g_{\mu\nu}\}$ denota la forma matricial del tensor $g_{\mu\nu}$.

El producto de dos cuadrivectores se define en forma similar como

$$
a_\nu b^\nu = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{2.23}
$$

El inverso de la métrica es

$$
\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\} \tag{2.24}
$$

tal que

$$g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \qquad \text{and} \qquad a^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu \tag{2.25}$$

Bajo una transformación de Lorentz.

$$a^\mu \to a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu. \tag{2.26}$$

La invarianza del producto escalar en ec. (2.23)

$$a'^\mu b'{}_\mu = a^\mu b_\mu \tag{2.27}$$

da lugar a

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta}\Lambda^\beta{}_\nu \qquad \text{or} \qquad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_\mu{}^\alpha\}^{\mathrm{T}}\{g_{\alpha\beta}\}\left\{\Lambda^\beta{}_\nu\right\}. \tag{2.28}$$

Como un ejemplo de Transformación de Lorentz considere un desplazamiento a lo largo del eje x

$$\{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & \sinh\xi & 0 & 0 \\ \sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{\Lambda^\mu{}_\nu\}\{x^\nu\}, \tag{2.29}$$

donde

$$\cosh\xi = \gamma \qquad \sinh\xi = v\gamma, \qquad \text{and} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{2.30}$$

Claramente el $\Lambda^\mu{}_\nu$ definido en la ec. (2.29) satisface la condición en ec. (2.28).

Denotaremos los cuadrivectores con índices arriba como

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}) \tag{2.31}$$

Entonces el correspondiente cuadrivector con índices abajo, usando la ec. (2.21), es

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) = (a^0, -\mathbf{a}). \tag{2.32}$$

Con esta notación, el producto escalar de cuadrivectores puede expresarse como el producto escalar de los dos vectores de cuatro componente a^μ y a_μ.

2.2.1. Ejemplos de cuadrivectores

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \tag{2.33}$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}) \tag{2.34}$$

El invariante de Lorentz asociado a p^μ corresponde a la ecuación de momento energía una vez se identifica la masa de una partícula con su cuadrimomentum

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \tag{2.35}$$

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) = (\rho, \mathbf{J}) \tag{2.36}$$

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}) \tag{2.37}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3}\right)\\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&=(\partial_0, -\boldsymbol{\nabla}) = (\partial^0, -\boldsymbol{\nabla})
\end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = (\partial_0, \boldsymbol{\nabla}) \tag{2.39}$$

Por consiguiente:

$$\boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \tag{2.40}$$

Producto escalar:

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a_\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - a^i b^i = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{2.41}$$

Entonces

$$\partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} \tag{2.42}$$

La ecuación de continuidad $\partial_\mu J^\mu = 0$ es un invariante de Lorentz. El operador cuadrático es, usando la ec. (2.20)

$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^0 \partial^0 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \tag{2.43}$$

Por consiguiente la ecuación de onda en ec. (1.127) es invariante de invariante de Lorentz

Los operadores de energía y momentum de la mecánica cuántica también forma un cuadrivector

$$\hat{p}^\mu = (\hat{p}^0, \hat{\mathbf{p}}) = (\widehat{H}, \hat{\mathbf{p}}) \tag{2.44}$$

con $\widehat{H}$, y $\hat{\mathbf{p}}$ dados en la ec. (1.88). Entonces

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i(\partial^0, \partial^i) = i(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}) \tag{2.45}$$

2.2.2. Ecuaciones covariantes

Con el cuadrivector (2.45) podemos construir la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \phi &= m^2 \phi\\
i\partial_\mu i\partial^\mu \phi &= m^2 \phi\\
-\partial_\mu \partial^\mu \phi &= m^2 \phi\\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi &= 0.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon (1.130). Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. El Lagrangiano covariante que da lugar a ésta ecuación es (ver ec. (1.127) (1.129)).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{2.47}$$

El Lagrangiano más general posible para el campo ϕ es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + a\phi + b\phi^3. \tag{2.48}$$

Un término de la forma $\partial_\mu\partial^\mu\phi$ puede reabsorverse en la ec. (2.48) como una derivada total. Un posible término $J_\mu\partial^\mu\phi$, con J_μ constante, también puede reescribirse como una derivada total. Un término constante no afecta las ecuaciones de movimiento. Imponer la simetría $\phi \to -\phi$ anula los dos últimos términos. Potencias de ϕ mayores de cuatro daría lugar a una Teoría Cuántica de Campos no renormalizable.

La dimensión del campo ϕ puede obtenerse usando que la acción es adimensional

$$[S] \supset \left[\int d^4x\, m^2\phi^2\right] = E^{-4}E^2[\phi]^2 \to [\phi] = E^1 \tag{2.49}$$

Diremos entonces que la dimensión de ϕ es 1 (en unidades de energía). Similarmente

$$[S] \supset \left[\int d^4x\, \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi\right] = E^{-4}[\partial_\mu]^2E^2 \to [\partial_\mu] = E^1 \tag{2.50}$$

Como era de esperarse debido a que la derivada tiene unidades de longitud inversa.

Si hacemos $\lambda = a = b = 0$ en la ec. (2.48), y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.38), se obtiene

$$\begin{aligned}
(\hat{p}_\mu\hat{p}^\mu - m^2)\phi &= 0 \\
(\hat{E}^2 - \hat{\mathbf{P}}^2 - m^2)\phi &= 0 \qquad (2.51)\\
(\Box + m^2)\phi &= 0, \qquad (2.52)
\end{aligned}$$

donde

$$\Box \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \tag{2.53}$$

Es el D'Alembartiano [12]. Ec. (2.51) corresponde a la forma de operadores de la ecuación de energía-momentum relativista. La ec. (2.52) se conoce como la ecuación de Klein-Gordon, con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{2.54}$$

que es invariante de Lorentz y tiene la simetría $\phi \to -\phi$. A ϕ se le denomina *campo escalar*.

Definiendo

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\
G^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu
\end{aligned}$$

El Lagrangiano invariante de Lorentz para el cuadrivector A^μ en ec. (2.37) es, hasta derivadas totales

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu + K_\nu A^\nu A_\mu A^\mu + \lambda A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu \\
&+ a_1\partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + a_2F^{\mu\nu}A_\mu A_\nu + a_3G^{\mu\nu}A_\mu A_\nu \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

2.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante

Ecuaciones homogéneas:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{2.56}$$

Ecuaciones inhomogéneas:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \tag{2.57}$$

La primera ecuación establece la ausencia de cargas magnéticas, la segunda corresponde a la Ley de Faraday y la tercera a la Ley de Gauss. La cuarta sin el término de desplazamiento eléctrico introducido por Maxwell corresponde a la Ley de Ampère

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \tag{2.58}$$

Tomando la divergencia en esta expresión tenemos

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0, \tag{2.59}$$

que corresponde a la ecuación de continuidad (1.44) para ρ constante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0. \tag{2.60}$$

De este modo la Ley de Ampère da lugar a la conservación de carga eléctrica pero solo a nivel global: una perdida de carga eléctrica en un punto del universo puede ser compensada por la aparición instantánea de carga eléctrica en otro lugar del universo. La conservación global podría necesitar la propagación instantánea de señales, y esto está en conflicto con la relatividad especial.

Tomando la divergencia de la Ley de Ampère modificada por Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \tag{2.61}$$

obtenemos la ecuación de continuidad (2.60). Dicha ecuación establece que la razón de decrecimiento de la carga en un volumen arbitrario V es debido precisa y únicamente al flujo de la corriente fuera de su superficie; de modo que la carga no puede ser creada ni destruida dentro de V. Ya que V puede ser arbitrariamente pequeño esto significa que la carga eléctrica debe conservarse localmente. El término extra introducido por Maxwell está motivado por un requerimiento de conservación local.

A la luz del teorema de Noether la conservación local de la carga eléctrica debe provenir de una transformación continua y *local* que deje invariante a la ecuaciones de Maxwell. Las invarianza gauge de la ecuaciones de Maxwell juegan este papel. Las cargas conservadas localmente pueden determinarse a partir de la dinámica del sistema [20], además del uso de cargas conocidas que participen en alguna reacción. Por ejemplo se puede estudiar la forma como responde una partícula de carga desconocida a campos electromagnéticos para determinar su carga.

El principio gauge local, que pretendemos formular, va más allá del teorema de Noether estableciendo una relación entre las simetrías, las leyes de conservación y la dinámica. Este se constituye en el paradigma para estudiar las interacciones relevantes en física de partículas.

Para mostrar la invarianza gauge que exhiben las ecuaciones de Maxwell, es conveniente reescribirlas en forma covariante. Para ello es conveniente usar el potencial escalar eléctrico ϕ y el potencia vectorial magnético $\mathbf{A}$.

Las siguientes ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones homogéneas de Maxwell

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \qquad\qquad \mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}. \tag{2.62}$$

Ya que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \\
&= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} &= \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Usando el cuadrivector en ec. (2.37) y expandiendo la ec. (2.62), tenemos

$$\begin{aligned}
E^i &= -(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^0}) \\
&= (\frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0}) \\
&= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \qquad \mu = i, \quad \nu = 0 &\quad (2.63) \\
E^i &= F^{i0} &\quad (2.64)
\end{aligned}$$

donde hemos definido el Tensor de intensidad electromágnetica como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.65}$$

A A^μ se le denomina *campo vectorial*. Similarmente

$$\begin{aligned}
B^k &= \epsilon_{ijk}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
\epsilon_{lmk}B^k &= \epsilon_{lmk}\epsilon_{ijk}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
&= (\delta_{li}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{mi})\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
&= \frac{\partial A^m}{\partial x^l} - \frac{\partial A^l}{\partial x^m} \\
&= \partial^m A^l - \partial^l A^m \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \qquad \mu = m, \quad \nu = l. &\quad (2.66) \\
\epsilon_{lmk}B^k &= F^{ml} &\quad (2.67)
\end{aligned}$$

Por consiguiente la ec. (2.65) es también equivalente a las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. En forma matricial,

$$\begin{aligned}
F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & 0 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & 0 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & \epsilon_{213} B^3 & \epsilon_{312} B^2 \\ E^2 & \epsilon_{123} B^3 & 0 & \epsilon_{321} B^1 \\ E^3 & \epsilon_{132} B^2 & \epsilon_{231} B^1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{2.68}$$

La ec. (2.65) satisface la identidad,

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \tag{2.69}$$

Definiendo el tensor dual como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

la ec. (2.69) puede escribirse como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.70}$$

Para reescribir las ecuaciones de Maxwell inhomogénas en forma covariante usaremos además el cuadrivector J^μ de la ec. (2.36). Usando la ec. (2.63), la primera ecuación de Maxwell inhomogénea (2.57) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0 \\
\frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\
\partial_i F^{i0} &= J^0
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Usando las ecs. (2.63), (2.66), la segunda ecuación de Maxwell inhomogénea (2.57) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk}\frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
-\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
-\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\
\partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\
\partial_\mu F^{\mu k} &= J^k
\end{aligned} \tag{2.72}$$

	E, **B**	A^μ	$F^{\mu\nu}$
Homogéneas	Ec. (2.56)	(2.62)	(2.65) ó (2.69) ó (2.70)
Inhomogéneas	(2.57)		(2.73)

Tabla 2.2: Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones (2.71), (2.72) pueden escribirse en forma compacta como

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ &= \begin{cases}\partial_\mu(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^i) = J^0 & \text{para } \nu = 0 \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) = J^i & \text{para } \nu = i\end{cases}\end{aligned} \tag{2.73}$$

Los resultados sobre la notación covariante de la ecuaciones de Maxwell están resumidos en la Tabla 2.2 De la parte izquierda de la ecuación (2.73), podemos ver que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Por consiguiente, la cuadricorriente J^μ es conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{2.74}$$

2.3.1. Lagrangiano Electromagnético

La ec. (2.62) es invariante bajo las siguientes transformaciones

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi \qquad\qquad \phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{2.75}$$

Ya que

$$\mathbf{E} \to \mathbf{E}' = -\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\chi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\chi = \mathbf{E} \tag{2.76}$$

$$\mathbf{B} \to \mathbf{B}' = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} + \underbrace{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\chi}_{=0} = \mathbf{B} \tag{2.77}$$

Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes calibraciones para sus medidas, obtienen los mismos campos. Las ecs. (2.75), corresponden a *transformaciones gauge locales*

En notación covariante

$$\begin{aligned}A^\mu \to A'^\mu &= \left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi\right) \\ &= \left(\phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, A^i + \partial_i \chi\right) \\ &= \left(\phi - \partial^0 \chi, A^i - \partial^i \chi\right) \\ &= \left(\phi, A^i\right) - \left(\partial^0 \chi, \partial^i \chi\right) \\ A^\mu \to A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu \chi\end{aligned} \tag{2.78}$$

Sea U un elemento del Grupo de Transformaciones $U(1)$:

$$U = e^{i\theta(x)} \in U(1) \tag{2.79}$$

El Grupo está definido por el conjunto infinito de elementos $U_i = e^{i\theta(x_i)}$. Entonces

- Producto de Grupo
$$U_1 \cdot U_2 = e^{i[\theta(x_1)+\theta(x_2)]} \equiv e^{i\theta(x_3)} \in U(1)$$

- Identidad:
$$\theta(x) = 0 \qquad \text{tal que} \qquad U_I = 1$$

- Inverso
$$\theta(-x) = -\theta(x) \qquad \text{tal que} \qquad U^{-1} = e^{-i\theta(x)}$$

Note que si

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \frac{i}{e}(\partial^\mu U)U^{-1} \tag{2.80}$$

(Si θ =cte, $A^\mu = A'^\mu$, invarianza de fase). Si θ es suficientemente pequeño

$$U = e^{i\theta(x)} \approx 1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \qquad\qquad U^{-1} = e^{-i\theta(x)} \approx 1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \tag{2.81}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A^{\mu\prime} =& -\frac{1}{e}(i\partial^\mu\theta(8x))[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] + A^\mu[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] \\ =& A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \tag{2.82}$$

Por consiguiente, si $\chi(x) = -(1/e)\theta(x)$, entonces la ec. (2.78) es la versión infinitesimal de la transformación $U(1)$ en ec. (2.80). Del Teorema de Noether debe existir una carga conservada corresponde a la carga eléctrica, asociada la corriente J^μ, de la cual aún no hemos especificado su origen.

Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} =& (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) \\ =& \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu\partial^\nu\chi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu\partial^\mu\chi \\ =& \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu\partial^\nu\chi + \partial^\mu\partial^\nu\chi \\ =& F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{2.83}$$

De este modo las ecuaciones homogéneas de Maxwell (2.65) son invariantes gauge. Como la transformación gauge solo afecta al campo A^μ, las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.73) también son invariantes gauge. De esta forma las ecuaciones de Maxwell corresponde a una Teoría Gauge!. Esto fue una curiosidad hasta los 1950.

Para ilustrar la relación entre la conservación local de la carga eléctrica y la transformación gauge, que no es una conexión simple, considere las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \tag{2.84}$$

que automáticamente incluyen la conservación local de carga, expresada por la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \tag{2.85}$$

Además las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo la transformación gauge

$$A^\mu \to A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \tag{2.86}$$

ya que dicha transformación deja invariante a $F^{\mu\nu}$. De aquí la sugerencia de la invarianza gauge esta relacionada de alguna manera a la conservación de la carga. De hecho la acción más general posible para el campo A^μ compatible tanto con la invarianza de Lorentz y la invarianza gauge local corresponde a la acción que da lugar a las ecuaciones de Maxwell.

Si queremos que la Acción refleja las simetrías de las ecuaciones de Maxwell debemos mantener sólo los términos del Lagrangiano para A^μ en (2.55) que sean invariantes hasta una derivada total. Bajo una transformación gauge, cada uno de los términos

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + K_\nu A^\nu A_\mu A^\mu + \lambda A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu + a_1 \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + a_2 F^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + a_3 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

dan lugar a un $\delta\mathcal{L} \neq \partial_\mu(\text{algo})$ y la Acción no es invariante bajo la transformación gauge. Para los otros términos, usando la ec. (2.74), tenemos

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \partial^\mu(J_\mu \chi)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \tag{2.87}$$

es el más general que da lugar a una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local.

Con miras a calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano en ec. (2.87), tenemos

$$\begin{aligned}
F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} =&(\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)\\
=&\partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\rho A^\sigma \partial_\sigma A_\rho - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma + \partial^\sigma A^\rho \partial_\sigma A_\rho\\
=&g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}(\partial_\alpha A_\beta \partial_\rho A_\sigma - \partial_\alpha A_\beta \partial_\sigma A_\rho - \partial_\beta A_\alpha \partial_\rho A_\sigma + \partial_\beta A_\alpha \partial_\sigma A_\rho).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} =&g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\partial_\rho A_\sigma + \partial_\alpha A_\beta \delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\partial_\sigma A_\rho - \partial_\alpha A_\beta \delta_{\sigma\mu}\delta_{\rho\nu}\\
&- \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}\partial_\rho A_\sigma - \partial_\beta A_\alpha \delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}\partial_\sigma A_\rho + \partial_\beta A_\alpha \delta_{\sigma\mu}\delta_{\rho\nu}).\\
=&g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\rho A_\sigma + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\alpha A_\beta - g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma A_\rho - g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\partial_\alpha A_\beta\\
&- g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\rho A_\sigma - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\beta A_\alpha + g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\rho + g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\partial_\beta A_\alpha\\
=&\partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu\\
=&4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = 4F^{\mu\nu} \tag{2.88}$$

Usando la ec. (2.88), tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0\\
-\frac{1}{4}\partial_\mu\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma})\right] + J^\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0\\
-\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\rho \delta_{\rho\nu} &= 0\\
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Como era de esperarse una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local, expresada en términos del Lagrangiano (2.87), da lugar a la Teoría Electromagnética.

De este modo las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar del requerimiento de que la teoría, además de ser invariante de Lorentz, pueda expresarse en términos de potenciales de una forma que sea invariante gauge en esos potenciales. Si un cuadrivector potencial A^μ es postulado, y se impone que la teoría involucre este solamente, de una forma que sea insensible a a cambios de la forma (2.78), se es conducido naturalmente a la idea de que los campos físicos entran únicamente vía la cantidad $F^{\mu\nu}$, que es invariante bajo la ec. (2.78). De aquí se puede conjeturar la ecuación de campo en base a la covarianza de Lorentz.

Esto no corresponde ciertamente a una prueba de las ecuaciones de Maxwell. A pesar de eso, la idea que la dinámica (en este caso la completa interconexión entre los efectos eléctricos y magnéticos) pueda estar íntimamente relacionada a un requerimiento de invarianza local se ha convertido en algo muy fructífero.

En términos de transformaciones globales, se puede mostrar [20] que el cambio por una constante del potencial escalar ($\chi = at$, $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A}$ en ec.(2.75)), más la conservación de energía, da lugar a la conservación local de la carga. La conservación local en este contexto requiere que el cambio por una función del potencial escalar en en (2.75) sea compensado por el correspondiente cambio en el vector potencial magnético A. En general, cuando una cierta invarianza global es generalizada a una local, se requiere la existencia de un nuevo campo que compensa, interactuando de una manera específica. La teorías que dan lugar al Modelo Estándar y que describen las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas, son ejemplos de teorías dinámicas derivadas desde un requerimiento de invarianza local.

Una de las principales razones de porque la física de partículas se formula en términos de lagrangianos, es que $\mathcal{L}$ debe ser escalar en cada espacio relevante, e invariante bajo las transformaciones (hasta derivadas totales), ya que la acción es invariante. Haciendo el Lagrangiano invariante de Lorentz por ejemplo, garantiza que todas las predicciones son invariantes de Lorentz.

2.3.2. Energía del campo electromagnético

Necesitamos la expresión para $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\eta} F^{\rho\eta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = F_{0\nu} = g_{00} g_{ij} F^{0j} = -F^{0i} & \text{para } \mu = 0 \\ F_{ij} = F_{i\nu} = g_{ik} g_{jl} F^{kl} = F^{ij} & \text{para } \mu = i \end{cases} \tag{2.90}$$

De la ec. (1.58), se tiene

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\lambda)} (\partial_\nu A_\lambda) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \\ &= -F^{\mu\lambda}(\partial_\nu A_\lambda) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \end{aligned} \tag{2.91}$$

La energía del campo, corresponde a la componente T^0_0:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0 A_\lambda) - \mathcal{L} \\ &= -F^{0\lambda}(\partial_0 A_\lambda) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (2.64), (2.67), (2.90)

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -\partial_\mu(A_0F^{0\mu}) + \partial_\mu(A_0F^{0\mu}) - F^{0\lambda}(\partial_0A_\lambda) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_\mu(A_0F^{0\mu}) + A_0\partial_\mu F^{0\mu} + F^{0\mu}\partial_\mu A_0 - F^{0\mu}(\partial_0A_\mu) + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_i(A_0F^{0i}) - A_0J^0 - F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_i(A_0F^{0i}) - F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \\
&= -\partial_i(A_0F^{0i}) - \frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}E^iE^i + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}B^k\epsilon_{ijl}B^l + \partial_i(A_0E^i) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}, \qquad \text{suma también sobre } i,j \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\delta_{kl}B^kB^l + \boldsymbol{\nabla}\cdot(A^0\mathbf{E}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \boldsymbol{\nabla}\cdot(A^0\mathbf{E}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0A_\lambda) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \\
&= -F^{0\mu}(\partial_0A_\mu) + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu 0}F_{\mu 0}}^{\nu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu i}F_{\mu i}}^{\nu=i} + J^\mu A_\mu \\
&= F^{\mu 0}\partial_\mu A_0 - F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_i(A_0F^{0i}) - F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{2}F^{0i}F_{0i} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \\
&= -\partial_i(A_0F^{0i}) - \frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}E^iE^i + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}B^k\epsilon_{ijl}B^l + \partial_i(A_0E^i) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}, \qquad \text{suma también sobre } i,j \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\delta_{kl}B^kB^l + \boldsymbol{\nabla}\cdot(A^0\mathbf{E}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \boldsymbol{\nabla}\cdot(A^0\mathbf{E}) - \mathbf{J}\cdot\mathbf{A}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Tenemos dos partes

$$\begin{aligned}
-F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} &= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{0i}F_{0i}}^{\mu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{ji}F_{ji}}^{\mu=j} \\
&= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{0i}F_{0i}}^{\mu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{ji}F_{ji}}^{\mu=j}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Entonces, en ausencia de corrientes

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\int_V d^3x\,(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2) + \int_V d^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(A^0\mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2}\int_V d^3x\,(\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2), \end{aligned} \tag{2.95}$$

corresponde a la energía del campo. Similarmente el momentum total del campo, en ausencia de corrientes, corresponde al vector de Pointing:

$$\begin{aligned} P^i = \int_V d^3x\,T^i_0 &= \int_V d^3x\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i + \int_V d^3x\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(A_i\mathbf{E}) \\ &= \int_V d^3x\,(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i. \end{aligned} \tag{2.96}$$

2.3.3. Fijación del gauge

Para obtener una solución definitiva a las ecuaciones del campo electromagnético, se debe remover la arbitrariedad asociada con la libertad gauge de la ec. (2.78). De este modo los campos quedan especificados unívocamente en todas partes. De hecho, de las cuatro componentes del campo A^μ, solo dos son independientes y corresponden a los estados de polarización de las ondas electromagnéticas [10] (Capítulo 2). A éste proceso se le denomina fijar el gauge, y consiste en imponer restricciones sobre los campos que fijan la función gauge χ y remueven la libertad gauge.

Nosotros usaremos el Gauge de Lorentz, definido por la condición

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.97}$$

Si inicialmente $\partial_\mu A^\mu \neq 0$, se realiza una transformación gauge tal que $\partial_\mu A'^\mu \neq 0$. De acuerdo a la ec. (2.78), esto da lugar a la ecuación de onda inhomogénea

$$\Box\chi = \partial_\mu A^\mu$$

que puede solucionarse mediante las técnicas usuales.

Es importante resaltar que la física queda inafectada por la escogencia del gauge. El resultado final para cualquier observable físico debe ser independiente del gauge usado para calcularlo.

Las ecuaciones de Maxwell (2.73) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu \\ \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu &= J^\nu \\ \partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) &= J^\nu. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Apliquemos ahora el gauge de Lorentz, ec. (2.97) a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.98)

$$\Box A^\nu = \partial_\mu\partial^\mu A^\nu = J^\nu. \tag{2.99}$$

De este modo, cada componente del campo A^μ satisface la ecuación de onda (2.46), o la ecuación de Klein-Gordon (2.52) con masa cero. En ausencia de corrientes el campo A^μ puede ser expandido en ondas planas con dos grados independientes de polarización [10], de forma similar a como se hizo en la sección 1.5 para el campo ϕ. Una vez cuantizada la teoría, A^μ corresponde al fotón, y solo queda con dos grados de libertad independientes que corresponden a los modos transversales de la onda electromagnética [10] (capítulo 2).

La ec. (2.87), with $J^\mu = 0$, en el Gauge de Lorentz puede escribirse como

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =& -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
=& -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
=& -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \\
=& -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) + A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\nu (A^\mu \partial_\mu A_\nu) + A^\mu \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) + \underbrace{\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu}_{\mu\leftrightarrow\nu}] \\
=& -\frac{1}{4}[2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (2A^\nu \partial_\nu A_\mu)] \\
=& -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

Incluyendo el término con corrientes, y usando el hecho de que un signo global no afecta las ecuaciones de movimiento, tenemos

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + J_\mu A^\mu \tag{2.101}
$$

2.4. Ecuaciones de Proca

Consideraremos ahora el efecto de adicionar un término de masa a la teoría de Maxwell. Los campos vectoriales masivos juegan un papel importante en física. Campos como W^μ, Z^μ que median las interacciones débiles son ejemplos de campos de este tipo. Las implicaciones de una masa finita para el fotón pueden inferirse de un conjunto de postulados que hacen de las ecuaciones de Proca la única generalización posible de las ecuaciones de Maxwell [13].

Teniendo en cuenta sólo el término de masa en la ec. (2.87)

$$
\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu. \tag{2.102}
$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\rho\eta}F_{\rho\eta}\right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left(\frac{1}{2}m^2 A^\rho A_\rho - J^\rho A_\rho\right) &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu &= J^\nu.
\end{aligned}
\tag{2.103}
$$

Tomando la cuadridivergencia a ambos lados de la ecuación y usando la ec. (2.98), tenemos

$$
\begin{aligned}
&\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu \\
&\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu \\
&m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu
\end{aligned}
\tag{2.104}
$$

De este modo, en ausencia de corrientes, la ecuaciones de Proca dan lugar a la condición de Lorentz. De otro lado, si asumimos que la corriente se conserva, la condición de Lorentz también aparece. Por consiguiente, si la masa de campo vectorial es diferente de cero, la condición de Lorentz, ec. (2.97), emerge como una restricción adicional que debe ser siempre tomada en cuenta. De este modo la libertad gauge de las ecuaciones de Maxwell se pierde completamente en la ecuaciones de Proca, que sin perdida de generalidad se pueden reescribir, usando $\partial_\mu A^\mu = 0$ y las ecs. (2.98), (2.103), como:

$$(\Box + m^2)A^\nu = J^\nu \tag{2.105}$$

En ausencia de corrientes, cada una de las componentes del campo vectorial satisface la ecuación de Klein-Gordon (2.52). Por consiguiente m corresponde a la masa del campo vectorial A^μ.

Aplicando la condición de Lorentz a la ec. (2.102), obtenemos el Lagrangiano de la Ecuación de Proca (2.105)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial_\mu A^\nu - \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu + J^\nu A_\nu, \tag{2.106}$$

donde hemos reabsorbido un signo global que no afecta las ecuaciones de movimiento. El primer término que incluye sólo derivadas de los campos es llamado *término cinético* y dependen sólo del espín de las partículas. El término cuadrático en los campos corresponde al *término de masa*, y el último corresponde a la interacción del campo con una corriente. Cuando un Lagrangiano contiene sólo términos cinéticos y de masa diremos que el campo que da lugar al Lagrangiano es libre de interacciones, o simplemente que es un *campo libre*. Las otras partes del Lagrangiano serán llamadas *Lagrangiano de Interacción*. De este modo podemos reescribir el Lagrangiano (2.106) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial_\mu A^\nu - \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= J^\nu A_\nu. \end{aligned} \tag{2.107}$$

Debido a que la teoría masiva ya no es invariante gauge, la condición de Lorentz aparece automáticamente como la única restricción apropiada sobre el campo vectorial.

Una vez se toma en cuenta la condición de Lorentz el campo masivo libre puede expandirse en ondas planas con tres grados de libertad independientes de polarización. Dos de estos corresponden a los dos estados transversos que aparecen en las ondas electromagnéticas (A^1, A^2), y el tercero (A^3) corresponde a un estado longitudinal en la dirección del momento de la partícula [10].

Aunque hemos hecho el análisis de la ecuación de Proca permitiendo un término de masa para el fotón, las implicaciones experimentales de una teoría de este tipo dan lugar a restricciones muy fuertes sobre la masa del fotón[13]. El límite actual sobre la masa del fotón es $m < 6 \times 10^{-17}\,\text{eV}$ ($1.1 \times 10^{-52}\,\text{Kg}$) [14]. Debido al principio gauge local, desde el punto teórico se espera que la masa del fotón sea exactamente cero. En general, los campos vectoriales puede ser generados a partir de otras cargas no electromagnéticas y pueden ser masivos. El reto durante varias décadas fue entender como las masa de los campos vectoriales de la interacción débil podría hacerse compatible con el principio gauge local.

2.5. Problemas

2.1 Muestre que

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\rho} = \Lambda_{\mu}{}^{\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho} = \delta^{\rho}_{\nu}$$

Compruebe esta identidad para la transformación de Lorentz de la ec. (2.29)

2.2 Muestre que el Lagrangiano electromagnético en ausencia de corrientes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right) \tag{2.108}$$

2.3 Calcule el rango de la interacción débil mediada por la partícula W^- de masa

$$m_W \approx 80\ GeV \tag{2.109}$$