9 Recapitulación

Con este capítulo daremos por terminadas estas sesenta lecciones introductorias de un curso de mecánica cuántica a nivel de pregrado. Miraremos a manera de colofón las diversas formulaciones de la teoría, la mayoría de la cuales ya fueron bosquejadas en el texto principal, e introduciremos igualmente algunas de las interpretaciones más populares de la mecánica cuántica.

9.1 Sexagésima Lección

En el estudio de la mecánica cuántica es muy importante diferenciar entre las formulaciones de la teoría y las interpretaciones de la misma. Por formulaciones de la teoría entenderemos los distintos formalismos matemáticos utilizados por los físicos para construir el modelo con el cual se describe el mundo atómico y subatómico. Las interpretaciones de la teoría se refieren a las diversas maneras de como los filósofos y algunos físicos han pretendido entender el formalismo matemático de las formulaciones más aceptadas de la mecánica cuántica, queriendo hacer un cuadro pictórico mental del micromundo de manera paralela al cuadro pictórico mental que se hace del macromundo.

9.1.1 Formulaciones de la mecánica cuántica

Haciendo un catálogo de formulaciones de la teoría nos encontramos con que hay por lo menos nueve formulaciones[XI-1], de las cuales dos fueron estudiadas con algo de profundidad en la primera parte de estas lecciones (la formulación matricial de Heisenberg y la formulación en funciones de onda de Schrödinger) y por lo menos cuatro formulaciones más se introducieron en el resto de las lecciones (en la lección número treinta se bosquejó la formulación en integrales de trayectoria de Feynman). Haremos a continuación un listado de las nueve formulaciones de la teoría, citaremos en que lección se introdujeron y haremos una breve descripción de aquellas formulaciones que no fueron mencionadas en el texto principal.

Listado de las formulaciones

1. Formulación matricial.
2. Formulación con funciones de onda.
3. Formulación por integrales de trayectoria.
4. Formulación en espacios de fase.
5. Formulación de matriz densidad.
6. Formulación variacional.
7. Formulación de segunda cuantización.
8. Formulación de onda piloto (algunos autores la clasifican como interpretación).
9. Formulación de Hamilton-Jacobi.

Formulación matricial.

Fué la primera formulación de la teoría, descubierta por Werner Heisenberg en junio de 1925 y elaborada casi de inmediato por Heisenberg, Born y Jordan. Véase al respecto las lecciones 13, 14 y 15 de estas notas, al igual que las referencias [I-7], [I-8], [I-9] y [I-10].

Formulación con funciones de onda.

La formulación con funciones de onda de la teoría, la de más amplia difusión y aceptación hoy en día, fué descubierta por Erwin Schrödinger casi seis meses después de la formulación matricial. Véase al respecto las lecciones 5 y 6 de estas notas al igual que la Referencia [I-11].

Estudios posteriores lograrón mostrar la equivalencia entre la formulación matricial y la formulación con funciones de onda. Véase al respecto la lección número 17.

Formulación en integrales de trayectoria.

Descubierta (inventada?) por Richard Feynman en 1948 como parte de su trabajo de doctorado, se ha convertido en la formulación predilecta de los físicos que trabajan en teorías de campos cuánticos, ya que es la única manera consistente conocida de cuantizar las teorías de campo que tienen como soporte grupos continuos de simetría no Abelianos.

La idea original surgió de un problema propuesto por Dirac en sus trabajos de la década de los años 1930, cuando se preguntó por la forma de la "*Amplitud de la transición*" de un sistema físico que se mueve del punto inicial $\vec{r}_i$ y tiempo t_i, al punto final $\vec{r}_f$ y tiempo t_f; amplitud que podemos denotar como $\langle \vec{r}_f, t_f | \vec{r}_i, t_i \rangle$. De esta amplitud de transición se obtiene la probabilidad de transición del punto $\vec{r}_i$ en el instante de tiempo t_i al punto $\vec{r}_f$ en el instante de tiempo t_f, como $\mathcal{P}_{if} = |\langle \vec{r}_f, t_f | \vec{r}_i, t_i \rangle|^2$.

En esta formulación es la amplitud de la transición el elemento fundamental de la teoría, en lugar de la función de onda de Schrödinger o de la ecuación de evolución temporal de los operadores de Heisenberg. El cálculo matemático de esta amplitud de transición requiere de técnicas avanzadas de integración (utilizar la llamada medida de Winner). La generalización de la formulación a sistemas relativistas o a partículas idénticas requiere de una ampliación del esquema original.

Para la solución que propuso Richard Feynman en 1948 al problema original de Dirac, véase la lección número 30 de estas notas.

Formulación en espacios de fase

Presentada originalmente por Eugene Wigner[XI-2]. Para su formulación se introduce una distribución en el espacio de fase, llamada función de Wigner definida como

$$W(x,p_x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dy\psi^*(x-y/2,t)\psi(x+y/2,t)e^{-ip_x y/\hbar}, \quad (9.1)$$

la cual se conecta con la formulación ordinaria de la teoría mediante la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p_x,t)dp_x = |\psi(x,t)|^2. \quad (9.2)$$

La matriz de densidad

El concepto de matriz de densidad se introdujo en estas notas en la lección número cuarentaycuatro. Una breve introducción a esta formulación sería la siguiente: sea $|\psi\rangle$ el vector de estado el cual me describe un sistema físico, el cual por estar descrito por un solo vector lo llamaremos un estado puro. La matriz de densidad para este sistema se define entonces como

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (9.3)$$

la cual es en realidad un operador que podriamos llamar el operador densidad. Si el sistema no está en un estado puro, sino en una mezcla estadística de los estados $|\psi_1\rangle$ con probabilidad p_1 y $|\psi_2\rangle$ con probabilidad p_2, la matriz de densidad toma entonces la forma

$$\hat{\rho} = p_1|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + p_2|\psi_2\rangle\langle\psi_2|, \quad (9.4)$$

con $p_i,\ i = 1,2$, dos probabilidades, números reales tales que $0 \leq p_i \leq 1$ con $p_1 + p_2 = 1$ que se conocen de entrada de manera bien definida. La matriz se puede generalizar de manera similar a sistemas que se encuentra en una mezcla estadística de tres o más estados.

La formulación de la matriz de densidad es de gran utilidad en problemas estadísticos cuánticos.

Formulación variacional

Al respecto es necesario distinguir entre la llamada formulación variacional de la mecánica cuántica la cual se introdujo en estas notas en la lección número 46 y el conocido como método variacional que es una manera aproximada de resolver problemas en mecánica cuántica que no tienen solución matemática exacta, método que se introdujo en la trigésimo tercera lección.

En la formulación variacional de la teoría se trata de hallar una densidad Lagrangiana que dependa de la función de onda ψ y de sus derivadas espacio-temporales, la cual se integra en el tiempo para obtener una acción, la que, al aplicarle el método variacional o equivalentemente la ecuación de de Euler-Lagrange (como en la mecánica clásica), reproduzca la ecuación de Schrödinger y su complejo conjugado.

Segunda cuantización

En esta formulación, el Lagrangiano de la formulación variacional es reemplazado por un operador de Lagrange en el cual la función de onda ψ y su variable canónico conjugada son substituidas por operadores de campo, los cuales satisfacen las reglas canónicas de cuantización. Esta formulación es muy útil cuando se trata con sistemas de muchas partículas idénticas.

La formulación de segunda cuantización de la ecuación de Schrödinger es objeto de un capítulo completo en la segunda parte de estas notas (véase al respecto las lecciones 47, 48, 49, 50 y 51) y la cuantización de los campos en general es el tema central de un curso sobre teoría cuántica de campos.

Formulación de onda piloto.

Descubierta por de Broglie y presentada originalmente en el quinto Congreso Solvay de 1927, fué luego elaborada en detalle por D. Bohm[X1-3] en 1952. En esta formulación la función de onda ψ que describe el sistema físico está dada por

$$\psi(x,t) = R(x,t)e^{iS(x,t)/\hbar}. \tag{9.5}$$

Esta formulación se puede utilizar para hacer aproximaciones semiclásicas de la teoría, siempre y cuando la función $R(x,t)$ sea una función adiabática en sus variables, lo cual es una manera de derivar la llamada aproximación WKB de la mecánica cuántica, la cual fué presentada en el capítulo quinceavo (véase al respecto las lecciones 34, 35 y 36).

Formulación de Hamilton-Jacobi

Esta formulación de la mecánica cuántica está inspirada en la formulación de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica. No fué sinó hasta 1983 que los físicos Robert Leacock y Michael Pagdett hicieron su presentación de manera sistemática[XI-4].

En esta formulación el elemento central no es la función de onda $\psi(x,t)$ si no una acción $S(x,t)$ compleja, la cual debe satisfacer una ecuación del tipo de Hamilton-Jacobi bajo la suposición que exista una continuación analítica al plano complejo de dicha ecuación de la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{r},\vec{p}) = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{|\nabla_r S|^2}{2m} + V(\vec{r}) = 0, \tag{9.6}$$

ecuación equivalente a la ecuación de Scrhödinger siempre y cuando la relación entre la función de onda ψ y la acción compleja sea de la forma

$$\psi(xyz,t) = e^{iS(xyz,t)/\hbar}, \tag{9.7}$$

que nos permite escribir la acción como $S = -i\hbar \ln \psi(xyz,t)$, la cual es compleja y por lo tanto no puede ser la acción de la mecánica clásica la cual es real.

Reemplazando S en la ecuación (9.6) obtenemos

$$-\frac{i\hbar}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}|\frac{\nabla\psi}{\psi}|^2 + V(\vec{r}) = 0. \tag{9.8}$$

Multiplicando esta ecuación por $|\psi|^2$ se obtiene

$$-i\hbar\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}\psi^*.\vec{\nabla}\psi + V\vec{r}\psi^*\psi = 0.$$

Utilizando la identidad $\vec{\nabla}\psi^*.\vec{\nabla}\psi = \vec{\nabla}.(\psi^*\vec{\nabla}\psi) - \psi^*(\vec{\nabla}^2\psi)$ en el segundo término, y eliminando el término de la divergencia global haciendo uso del teorema de Gauss (luego de una integración sobre todo el espacio), obtenemos finalmente la ecuación de Scrhödinger.

Para terminar esta sección nótese que por lo menos en tres de las formulaciones de la teoría (la de integrales de trayectoria, la de onda piloto y la de Hamilton-Jacobi), una función de onda proporcional a

$$\psi(\vec{r}, t) \sim e^{iS(\vec{r},t)/\hbar}$$

juega un papel fundamental.

9.1.2 Interpretaciones de la mecánica cuántica

Con la idea de entender el micromundo de la misma manera que los físicos entendemos el mundo clásico, diversas interpretaciones a la mecánica cuántica han aparecido a lo largo de su desarrollo. De las varias interpretaciones de la teoría, no hay consenso entre los físicos ni entre los epistemólogos sobre cual es la que debe prevalecer como aceptable. Aún más, no esta claro si tiene sentido o no el tratar de interpretar la teoría.

La idea de interpretar la mecánica cuántica nace del debate sostenido durante varios años entre Albert Einstein y Niels Bohr, debate que se inicia en 1920 durante la visita que hizo Bohr a Berlín donde trabajaba Einstein y que alcanza su climax en el quinto congreso Solvay de física realizado en Bruselas del 24 al 29 de octubre de 1927 y continuó en el sexto congreso Solvay de física realizado igualmente en Bruselas, esta vez del 20 al 25 de octubre de 1930 (el primer congreso Solvay de física se llevó a cabo en Leiden en 1911 y tuvo como tema central "La teoría de la radiación y los cuantos").

Al quinto congreso Solvay, presidido por Hendrik A. Lorentz y que tuvo por tema central "Los electrones y los fotónes", asistieron entre otros: Bohr, Born, Bragg, Brillouin, Marie Curie, de Broglie, Compton, Debye, Dirac, Ehrenfest, Einstein, Fowler, Heisenberg, Kramers, Pauli, Planck, Richardson y Schrödinger. El debate central en este congreso fué sobre la elaboración del principio de complementaridad de Bohr y los argumentos de Einstein para mostrar que la mecánica cuántica era una teoría inconsistente. Los argumentos de Einstein fueron rebatidos de manera consistente por los participantes, muy en especial por Bohr. Los debates continuaron en el sexto congreso Solvay, con resultados similares. Como consecuencia, Einstein cambió de argumento y luego de dicho congreso se concentró en la demostración que la mecánica cuántica era una teoría no inconsistente, sinó incompleta. Demostración que culminó con el artículo de Einstein, Podolsky y Rosen y que pasó a la historia de la física como la llamada "Paradoja EPR [XI-5]". A decir verdad, Einstein nunca se sintió satisfecho con la teoría cuántica.

Del debate entre Einstein y Bohr nacieron las dos primeras interpretaciones de la mecánica cuántica: la interpretación de Copenhagen y la interpretación estadísitica. Aunque ninguna de estas dos interpretaciones ha sido formulada de manera unívoca y clara, veámos a continuación como las entiende el autor de estas notas.

Interpretación de Copenhagen

Llamada así en honor al Instituto en Copenhagen creado por Bohr. La base de la interpretación es que la función de onda ψ me describe un sistema físico individual (un electrón, un átomo de hidrógeno, un gato en una caja, etc.).

El postulado que la función de onda $\psi(\vec{\xi})$ describe de manera completa y exhaustiva un sistema físico está intimamente ligado a esta interpretación de la teoría.

La interpretación de Copenhagen de la mecánica cuántica la podemos asociar perfectamente a los nombres de W. Heisenberg, N. Bohr y D. Bohm, tres nombres intimamente ligados al descubrimiento de la teoría.

Interpretación estadística

En esta interpretación la función de onda ψ me describe no un sistema físico individual, sinó un ensamble estadístico de sistemas físicos igualmente preparados. El resultado de una medida de una magnitud física en esta interpretación, el cual es uno de los autovalores de dicha magnitud física, me dá información sobre uno de los sistemas del ensamble, presisamente aquel sistema que se encontraba en el estado del valor medido.

Podemos, de manera un poco atrevida, asociar el nombre de A. Einstein con esta interpretación estadística de la teoría.

Otras interpretaciones

Las dos interpretaciones anteriores no son las únicas que hay de la mecánica cuántica, aunque si las más comunes. Un listado incompleto de algunas otras interpretaciones de la teoría, algunas de ellas con nombres exóticos, podría ser:

Interpretación de los mundos paralelos, interpretación de las historia consistentes, interpretación de las mentes paralelas, interpretación estocástica, la aproximación decoherente, interpretación modal, interpretación transaccional (elevada por algunos autores a la categoría de formulación), la lógica cuántica, el colapso de la función de onda en la medida (uno de los axiomas originales de J. von Newman en su formulación axiomática de la teoría), etc..

Variables ocultas

Varias de las interpretaciones enunciadas en la sección anterior hacen uso de las llamadas variables ocultas.

Según el formalismo de la mecánica cuántica, dos funciones de onda ψ y $e^{i\zeta}\psi$ que difieren solo en la fase $e^{i\zeta}$ tienen el mismo significado físico (véase el postulado P_{1b} en la segunda lección) y me podrían representar de manera no ambigua el mismo sistema físico. Quienes como Einstein creen que la mecánica cuántica es una teoría incompleta, han especulado sobre la posibilidad que la fase ζ pueda depender de nuevas variables (las variables ocultas), las que en principio podrían completar la teoría. A la fecha, nadie se ha ideado un formalismo consistente que diga cuales podrían ser dichas variables.

El lector interesado en profundizar sobre los temas de las diversas interpretaciones de la mecánica cuántica y de las variables ocultas, tiene a su disposición una literatura muy amplia en la red y en un sin número de libros allí citados.

Para concluir podemos decir que el estado ontológico de cada una de las interpretaciones de la mecánica cuántica y de los distintos modelos sobre variables ocultas, es un conjunto de argumentos filosóficos que bién podriamos colocar al margen de la teoría. Mi actitud personal, un poco fuera de contexto, se identifica más con la frase: **cállese y calcule**, atribuida (erroneamente) a Richard Feynman.