4 Momentos Angulares

Estudiaremos en este capítulo la forma como se hace la adición de dos momentos angulares independientes en mecánica cuántica. Introduciremos los llamados coeficientes de Clebsh-Gordan (así llamados en honor a los matemáticos alemanes Alfred Clebsh y Paul Gordan quienes los definieron por primera vez en el siglo XIX, cuando trabajaban sobre invariantes matemáticos). Calcularemos detalladamente estos coeficientes para varios casos, en particular para el caso de la adición de un momento angular orbital arbitrario con un momento angular de espín de valor 1/2. Introduciremos luego el concepto de momento angular total y presentaremos la ecuación de Pauli. Definiremos los símbolos 3-j, 6-j, 9-j y 12-j e introduciremos el concepto de operadores tensoriales irreducibles. Finalmente enunciaremos el llamado teorema de Wigner-Eckhart. En todo el capítulo trabajaremos en unidades de $\hbar$, es decir, asumiremos que $\hbar = 1$.

4.1 Trigesimo novena Lección

Estudiaremos en esta lección los rudimentos de la suma de dos momentos angulares en mecánica cuántica; es decir, hallaremos el significado de la expresión vectorial $\vec{J}_1 \oplus \vec{J}_2$ donde $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ son dos vectores que representan momentos angulares independientes (si no son independientes no podemos definir su suma).

4.1.1 Algebra de $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$

Por ser $\vec{J}_1$ y $\vec{J}_2$ dos momentos angulares independientes estos deben satisfacer las siguientes relaciones de conmutación

$$[J_{ai}, J_{aj}] = \sum_k \epsilon_{ijk} J_{ak}, \quad a = 1, 2 \tag{4.1}$$ alfun1

$$[J_{1i}, J_{2j}] = 0 \tag{4.2}$$ alfun2

para $i, j, k = x, y, z$. Relaciones de conmutación que definen dos algebras independientes de momento angular [independientes debido al conmutador en (alfun2 4.2)] y de las cuales se pueden derivar otras relaciones de conmutación como por ejemplo:

$$[J_a^2, J_{1j}] = [J_a^2, J_{2j}] = [J_1^2, J_2^2] = 0$$

para $j = x, y, z$, con $J_a^2 = J_{ax}^2 + J_{ay}^2 + J_{az}^2; \quad a = 1, 2$. Estas últimas relaciones, junto con (alfun2 4.2) muestran que el conjunto de operadores $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ forman un conjunto máximo de operadores ya que conmutan todos entre sí.

Sean ahora $\chi_{j_a m_a}$ las autofunciones simultáneas de J_a^2 y J_{az}, $a = 1, 2$, es decir son tales que satisfacen las ecuaciones

$$J_1^2 \chi_{j_1 m_1} = j_1(j_1+1)\chi_{j_1 m_1}, \; J_{1z}\chi_{j_1 m_1} = m_1 \chi_{j_1 m_1} \;\; m_1 = j_1, j_1 - 1, \cdots - j_1$$

$$J_2^2 \chi_{j_2 m_2} = j_2(j_2+1)\chi_{j_2 m_2}, \; J_{2z}\chi_{j_2 m_2} = m_2 \chi_{j_2 m_2} \;\; m_2 = j_2, j_2 - 1, \cdots - j_2,$$

con j_1 y j_2 dos números enteros o semienteros cualesquiera que me definen el valor máximo de la componente z del momento angular de cada subespacio independiente.

Lo anterior nos muestra que el conjunto de $(2j_1+1)(2j_2+1)$ funciones $\mathcal{Y}_{j_1 j_2 m_1 m_2} \equiv \chi_{j_1 m_1}\chi_{j_2 m_2}, \quad m_1 = j_1, j_1 - 1, \cdots - j_1, \quad m_2 = j_2, j_2 - 1, \cdots - j_2$ forman un conjunto completo de autofunciones del conjunto máximo de operadores $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ para valores enteros o semienteros arbitrarios de j_1 y j_2.

4.1.2 Algebra de $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$

Definamos ahora el vector $\vec{J}$ tal que

$$\vec{J} \equiv \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = \vec{u}_x(J_{1x} + J_{2x}) + \vec{u}_y(J_{1y} + J_{2y}) + \vec{u}_z(J_{1z} + J_{2z}), \qquad (4.3)$$ L1l12

y busquemos las autofunciones y los autovalores de $J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$ y de $J_z = (J_{1z} + J_{2z})$. Para eso, empecemos por demostrar que el nuevo vector $\vec{J} = \vec{u}_x J_x + \vec{u}_y J_y + \vec{u}_x J_z$ es un momento angular, con $J_j = J_{1j} + J_{2j}, \;\; j = x, y, z$; es decir, demostremos que las componentes de $\vec{J}$ satisfacen un álgebra de la forma

$$[J_i, J_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} J_k, \;\; i, j, k = x, y, z, \qquad (4.4)$$ almas

lo cual es facil de ver haciendo uso de las ecuaciones (4.1) y (4.2), ya que se tiene

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j} + J_{2j}] = [J_{1i} + J_{2i}, J_{1j}] + [J_{1i} + J_{2i}, J_{2j}] \\
&= [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{2i}, J_{1j}] + [J_{1i}, J_{2j}] + [J_{2i}, J_{2j}] \\
&= [J_{1i}, J_{1j}] + [J_{2i}, J_{2j}] = \sum_k \epsilon_{ijk} J_{1k} + \sum_k \epsilon_{ijk} J_{2k} \\
&= \sum_k \epsilon_{ijk}(J_{1k} + J_{2k}) = \sum_k \epsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}$$

Hemos probado entonces que $\vec{J}$ es un momento angular, por lo tanto sus autofunciones χ_{jm} están caracterizadas por los dos números cuánticos j y m tales que j es un número entero o semientero y m toma los $2j+1$ valores posibles $j, j-1, j-2, \cdots -j$ y son tales que $J^2\chi_{jm} = j(j+1)\chi_{jm}$ y $J_z\chi_{jm} = m\chi_{jm}$. Además, por tratarse de un momento angular se debe satisfacer la relación de conmutación $[J^2, J_j] = 0, \; j = x, y, z$; con

$$\begin{aligned}
J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = (J_{1x} + J_{2x})^2 + (J_{1y} + J_{2y})^2 + (J_{1z} + J_{2z})^2 \\
&= \sum_{j=x,y,z} (J_{1j} + J_{2j})^2 \\
&= (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1.\vec{J}_2 \\
&= J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1x}J_{2x} + 2J_{1y}J_{2y} + 2J_{1z}J_{2z} \\
&= J_1^2 + J_2^2 + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z},
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de las definiciones $J_{a\pm} = J_{ax} \pm iJ_{ay},\ a = 1, 2$. Utilizando el desarrollo anterior para J^2 es igualmente fácil probar que el conjunto de operadores $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$, conmutan todos entre sí, como puede verse de los siguientes desarrollos:

$$\begin{aligned}
[J^2, J_a^2] &= [J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1.\vec{J}_2, J_a^2] \\
&= [J_1^2, J_a^2] + [J_2^2, J_a^2] + 2\sum_{j=x,y,z}[J_{1j}J_{2j}, J_a^2] \\
&= 2\sum_j J_{1j}[J_{2j}, J_a^2] + 2\sum_j [J_{1j}, J_a^2]J_{2j} = 0, \quad a = 1, 2.
\end{aligned}$$

$$[J_z, J_a^2] = [J_{1z} + J_{2z}, J_a^2] = [J_{1z}, J_a^2] + [J_{2z}, J_a^2] = 0.$$

Pero que relación existe entre j y el conjunto (j_1, j_2), m y el conjunto (m_1, m_2) y más importante, que relación hay entre las autofunciones χ_{lm} y el conjunto $\mathcal{Y}_{j_1 j_2 m_1 m_2} = \chi_{j_1 m_1}\chi_{j_2 m_2}$? Esta relación, la cual desarrollaremos a continuación, es la esencia del método matemático de la adición de dos momentos angulares.

Lo que se pretende es hallar autofunciones simultáneas del conjunto máximo de operadores $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$, en función de las autofunciones simultáneas de otro conjunto máximo de operadores $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ las cuales ya fueron halladas en la sección anterior. En términos matemáticos, queremos hacer un cambio de base de las autofunciones simultáneas del conjunto máximo de operadores $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$, a las del conjunto máximo de operadores $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$, en un espacio lineal de dimension $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

4.1.3 Autofunciones de autovalor $m = j = j_1 + j_2$

A manera de ejemplo, comencemos por mostrar que la función $\mathcal{Y}_{j_1 j_2 j_1 j_2} = \chi_{j_1 j_1}\chi_{j_2 j_2}$ es autofunción de J^2 de autovalor $(j_1 + j_2)(j_1 + j_2 + 1)$ y autofunción de J_z de autovalor $j = j_1 + j_2$. Para hacer la demostración, haremos uso de la siguiente forma de J^2

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J}_1.\vec{J}_2 = J_1^2 + J_2^2 + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z},$$

y del hecho que el operador escalera J_{a+} operando sobre $\chi_{j_a j_a}$ nos da cero, lo cual implica que el término cruzado

$$(J_{1+}J_{2-}+J_{1-}J_{2+})\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} = (J_{1+}\chi_{j_1j_1})(J_{2-}\chi_{j_2j_2})+(J_{1-}\chi_{l_1l_1})(J_{2+}\chi_{j_2j_2})$$

se anula, lo cual nos permite escribir:

$$\begin{aligned} J^2\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} &= (J_1^2 + J_2^2 + 2J_{1z}J_{2z})\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} \\ &= [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2j_1j_2]\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} \\ &= [(j_1+j_2)^2 + (j_1+j_2)]\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} \\ &= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2}. \end{aligned}$$

De igual manera tenemos que

$$\begin{aligned} J_z\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} &= (J_{1z}+J_{2z})\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} = (J_{1z}\chi_{j_1j_1})\chi_{j_2j_2} + \chi_{j_1j_1}(J_{2z}\chi_{j_2j_2}) \\ &= j_1\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} + j_2\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} = (j_1+j_2)\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que $\mathcal{Y}_{j_1j_2j_1j_2} \equiv \chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2}$ es igual a $\chi_{jj} = \chi_{j_1+j_2,j_1+j_2}$, para $j = j_1 + j_2$ que es el valor máximo que puede tomar j, como lo demostraremos en la siguiente lección. Igualmente es trivial mostrar las siguientes dos relaciones

$$\begin{aligned} J_1^2\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} &= J_1^2\mathcal{Y}_{j_1j_2j_1j_2} = J_1^2\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} \\ &= j_1(j_1+1)\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} = j_1(j_1+1)\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2^2\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} &= J_2^2\mathcal{Y}_{j_1j_2j_1j_2} = \chi_{j_1j_1}(J_2^2\chi_{j_2j_2}) \\ &= j_2(j_2+1)\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} = j_2(j_2+1)\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} \end{aligned}$$

4.1.4 Autofunciones de $j = j_1 + j_2$ y $m = j_1 + j_2 - 1$

Comencemos por aplicar el operador $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ en ámbos lados de la igauldad $\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} = \chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2}$; tenemos

$$\begin{aligned} J_-\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} &= J_-\chi_{jj} = \sqrt{2j}\chi_{j,j-1} = \sqrt{2(j_1+j_2)}\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1} \\ &= J_-\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} = (J_{1-}+J_{2-})\chi_{j_1j_1}\chi_{j_2j_2} \\ &= (J_{1-}\chi_{j_1,j_1})\chi_{j_2,j_2} + \chi_{j_1,j_1}(J_{2-}\chi_{j_2,j_2}) \\ &= \sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} + \sqrt{2j_2}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1}. \end{aligned}$$

De donde podemos concluir que

$$\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1} = (\sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} + \sqrt{2j_2}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1})/\sqrt{2(j_1+j_2)}. \tag{4.5}$$

add1

Débido a que $[J^2, J_-] = 0$, un álgebra simple nos permite comprobar directamenet las dos relaciones

$$\begin{aligned} J^2\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1} &= (j_1+j_2)(j_1+j_2+1)\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1} \\ J_z\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1} &= (j_1+j_2-1)\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1}. \end{aligned}$$

De esta manera, es decir, iterando varias veces la aplicación del operador $J_- = J_{1-} + J_{2-}$, podemos construir las $2j+1 = 2(j_1+j_2)+1$ funciones $\chi_{j_1+j_2,m}$ para $m = j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-2,\ \ldots, -(j_1+j_2)$, autofunciones del conjunto máximo de operadores $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$, asociadas al valor particular de $j = j_1+j_2$.

4.2 Cuarentava lección

Introduciremos en esta lección los llamados coeficientes de Clebsh-Gordan, los cuales juegan un papel central en el problema de adición de dos momenmtos angulares. Derivaremos igualmente algunas propiedades que satisfacen estos coeficientes.

4.2.1 Coeficientes de Clebsh-Gordan

Se definen los coeficientes de Clebsh-Gordan $\mathcal{C}_{j,m}^{j_1j_2m_1m_2} \equiv \mathcal{C}_{j,m}^{m_1,m_2}(j_1,j_2)$ (también llamados coeficientes de Wigner o coeficientes de acoplamiento vectorial) como los coeficiente que aparecen en la expansión de la base χ_{jm}, autofunciones del conjunto completo $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$ en función de la base $\mathcal{Y}_{j_1j_2m_1m_2} = \chi_{j_1m_1}\chi_{j_2m_2}$, autofunciones del conjunto completo $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$, para valores fijos de j_1 y j_2, los valores máximos que pueden tomar m_1 y m_2 respectivamente. Es decir:

$$\chi_{jm} = \sum_{m_1,m_2} \mathcal{C}_{j,m}^{m_1,m_2}(j_1,j_2)\chi_{j_1m_1}\chi_{j_2m_2}. \tag{4.6}$$

clgo

De esta definición podemos ver que al final de la lección anterior calculamos ya varios de estos coeficientes los cuales fueron:

$$\mathcal{C}^{m_1=j_1,m_2}_{j=j_1+j_2,m=j_1+j_2}(j_1,j_2) = \delta_{m_2 j_2}.$$

$$\mathcal{C}^{m_1=j_1-1,m_2}_{j_1+j_2,j_1+j_2-1}(j_1,j_2) = \sqrt{j_1/(j_1+j_2)}\delta_{m_2 j_2}.$$

$$\mathcal{C}^{m_1,m_2=j_2-1}_{j_1+j_2,j_1+j_2-1}(j_1,j_2) = \sqrt{j_2/(j_1+j_2)}\delta_{m_1 j_1}.$$

Nótese de los valores aquí anotados que se cumple en partícular la relación

$$|\mathcal{C}^{m_1=j_1-1,j_2}_{j_1+j_2,j_1+j_2-1}(j_1,j_2)|^2 + |\mathcal{C}^{j_1,m_2=j_2-1}_{j_1+j_2,j_1+j_2-1}(j_1,j_2)|^2 = 1$$

Antes de continuar con el problema general de la adición de dos momentos angulares, derivemos primero algunas propiedades generales de los coeficientes de Clebsh-Gordan.

Propiedad 1

Conservación de la componente z del momento angular, la que puede expresarse matemáticamente como

$$\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m\neq m_1+m_2}(j_1,j_2) = 0 \tag{4.7}$$

(nótese que los coeficientes ya calculados satisfacen esta condición). Para demostrar esta propiedad, comencemos por aplicar el operador $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ en la ecuación (4.6) clgo

$$\begin{aligned} J_z\chi_{jm} &= m\chi_{jm} = m\sum_{m_1,m_2}\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1,j_2)\chi_{j_1m_1}\chi_{j_2m_2}, \\ &= \sum_{m_1,m_2}\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1,j_2)(J_{1z}+J_{2z})\chi_{j_1m_1}\chi_{j_2m_2}, \\ &= \sum_{m_1,m_2}\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1,j_2)(m_1+m_2)\chi_{j_1m_1}\chi_{j_2m_2}, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\sum_{m_1,m_2}\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1,j_2)(m-m_1-m_2)\chi_{j_1m_1}\chi_{j_2m_2} = 0 \tag{4.8}$$

clgo2

que tiene como consequencia que

$$\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1, j_2) = 0$$

a menos que $m = m_1 + m_2$. Igualmente, la ecuación (4.8) nos permite concluir que j, el valor máximo de m en el conjunto χ_{jm} es igual a $j_1 + j_2$, la suma de los valore máximos de m_1 y m_2, como lo habíamos afirmado al final de la lección anterior.

Lo anterior nos permite suprimir una de las sumatorias en la expansión (4.6) y escribir

$$\chi_{jm} = \sum_{m_1} \mathcal{C}^{m_1,m-m_1}_{j,m}(j_1, j_2)\chi_{j_1,m_1}\chi_{j_2,m-m_1}. \tag{4.9}$$

clgop

Propiedad 2

Normalización de los coeficientes de Clebsh-Gordan. Partiendo de las funciones propiamente normalizadas $\mathcal{Y}_{j_1 j_2 m_1 m_2} = \chi_{j_1 m_1}\chi_{j_2 m_2}$, autofunciones de $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$, y debido a las propiedades de los operadores escalera $J_{a\pm}$ que no cambian la normalización de las funciones al ser aplicados, se cumple que:

$$\sum_{m_1,m_2} |\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1, j_2)|^2 = \sum_{m_1} |\mathcal{C}^{m_1,m-m_1}_{j,m}(j_1, j_2)|^2 = 1, \tag{4.10}$$

clgon

normalización de los coeficientes, que no es más que un caso particular de la propiedad de ortonormalización, que mostraremos a continuación.

Propiedad 3

Ortonormalidad de los coeficientes de Clebsh-Gordan. Mostremos que los coeficientes en la expansión (4.9) satisfacen la relación

$$\begin{aligned} &\sum_{m_1}\sum_{m_2} \mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1, j_2)\mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j',m'}(j_1, j_2) = \\ &\sum_{m_1} \mathcal{C}^{m_1,m-m_1}_{j,m}(j_1, j_2)\mathcal{C}^{m_1,m'-m_1}_{j'm'}(j_1, j_2) = \delta_{jj'}\delta_{mm'}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

clgo3

Para hacer la demostración empecemos por suponer que $d\xi = d\xi_1 d\xi_2$ es el elemento de volumen del espacio de configuración de la función χ; es decir que tenemos $\chi(\xi)$ y $\chi_{j_a m_a}(\xi_a)$, $a = 1, 2$. Entonces, utilizando dos veces la expansión (4.6) e integrando sobre el espacio de configuraciones tenemos

$$
\begin{aligned}
\int d\xi^* \chi_{j'm'} \chi_{jm} &= \delta_{j'j} \delta_{m'm} \\
&= \sum_{m_1,m_2} \sum_{m_1' m_2'} \mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1, j_2) \mathcal{C}^{m_1',m_2'}_{j',m'}(j_1', j_2') \\
&\quad \int d\xi_1 \chi_{j_1' m_1'}(\xi_1)^* \chi_{j_1 m_1}(\xi_1) \int d\xi_2 \chi_{j_2' m_2'}(\xi_2)^* \chi_{j_2 m_2}(\xi_2) \\
&= \sum_{m_1,m_2} \sum_{m_1' m_2'} \mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1, j_2) \mathcal{C}^{m_1',m_2'}_{j',m'}(j_1', j_2') \delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'} \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'} \\
&= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j,m}(j_1, j_2) \mathcal{C}^{m_1,m_2}_{j',m'}(j_1, j_2) \\
&= \sum_{m_1} \mathcal{C}^{m_1,m-m_1}_{j,m}(j_1, j_2) \mathcal{C}^{m_1,m'-m_1}_{j',m'}(j_1, j_2),
\end{aligned}
$$

donde hemos supuesto que los conjuntos completos de funciones$\chi_{j_a m_a}(\xi)$ son ortonormales y que las funciones $\chi_{jm}(\xi)$, las autofunciones de J^2 y J_z resultan igualmente ortonormales como una consecuencia del uso iterado de los coeficientes J_-. La expresión anterior es válida solo para valores de j y j' relacionados con el mismo valor de j_1 y j_2 como se expresa explicitamente en el desarrollo anterior.

4.2.2 Cálculo de $\chi_{j=j_1+j_2,m}$

Mostremos a continuación como se termina de construir el conjunto completo de las $2j+1$ funciones $\chi_{j_1+j_2,m}$ autofunciones de $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$, para $m = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, -(j_1 + j_2)$ (del cual ya hemos hallado las dos primeras), mediante la aplicación reiterada del operador $J_- = J_{1-} + J_{2-}$, sobre la expresión

$$\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2} = \chi_{jj} = \chi_{j_1 j_1} \chi_{j_2 j_2}.$$

La aplicación de $(J_-)^2$ en χ_{jj} para $j = j_1 + j_2$ nos produce:

$$\begin{aligned}\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-2} &= \mathcal{C}^{j_1-2,j_2}_{j_1+j_2,j_1+j_2-2}\chi_{j_1,j_1-2}\chi_{j_2,j_2} + \mathcal{C}^{j_1-1,j_2-1}_{j_1+j_2,j_1+j_2-2}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2-1} \\ &+ \mathcal{C}^{j_1,j_2-1}_{j_1+j_2,j_1+j_2-2}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-2},\end{aligned}$$

donde el álgebra nos muestra que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{j_1-2,j_2}_{j_1+j_2,j_1+j_2-2} &= \sqrt{j_1(2j_1-1)}/\sqrt{(j_1+j_2)(2j_1+2j_2-1)} \\ \mathcal{C}^{j_1-1,j_2-1}_{j_1+j_2,j_1+j_2-2} &= 2\sqrt{j_1j_2}/\sqrt{(j_1+j_2)(2j_1+2j_2-1)} \\ \mathcal{C}^{j_1,j_1-2}_{j_1+j_2,j_1+j_2-2} &= \sqrt{j_2(2j_2-1)}/\sqrt{(j_1+j_2)(2j_1+2j_2-1)}.\end{aligned}$$

De manera análoga podemos calcular las funciones restantes hasta llegar a $\chi_{j_1+j_2,-(j_1+j_2)} = \chi_{j_1,-j_1}\chi_{j_2,-j_2}$.

4.2.3 Cálculo de $\chi_{j=j_1+j_2-1,m}$

Nótese que de la función

$$\chi_{j_1+j_2,j_1+j_2-1} = (\sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} + \sqrt{2j_2}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1})/\sqrt{2(j_1+j_2)},$$

autofunción de J^2 de autovalor $j_1 + j_2$ y de J_z de autovalor $j_1 + j_2 - 1$, puede obtenerse otra función ortogonal a la misma (linealmente independiente) la cual es

$$\chi_{jm} = (\sqrt{2j_2}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} - \sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1})/\sqrt{2(j_1+j_2)}, \quad (4.12)$$ `coglnn`

que también es autofunción de J_z de autovalor $j_1 + j_2 - 1$ (de conformidad a la propiedad 1 demostrada anteriormente). Pero con que valor de j está asociada esta nueva función?

Un álgebra elaborada, producto de la aplicación del operador $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2+} + 2J_{1z}J_{2z}$ y mediante el uso de los resultados:

$J_{1+}J_{2-}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1} = J_{1-}J_{2+}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} = 0$ y

$$\begin{aligned}
J_{1+}J_{2-}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} &= (J_{1+}\chi_{j_1,j_1-1})(J_{1-}\chi_{j_2,j_2}) = \sqrt{2j_1}\chi_{j_1j_1}\sqrt{2j_2}\chi_{j_2,j_2-1} \\
J_{1-}J_{2+}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1} &= (J_{1-}\chi_{j_1,j_1})(J_{1+}\chi_{j_2,j_2-1}) = \sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1-1}\sqrt{2j_2}\chi_{j_2,j_2} \\
J^2\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} &= [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2(j_1-1)j_2]chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} \\
&\quad +2\sqrt{j_1j_2}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1} \\
J^2\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1} &= [j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) + 2(j_2-1)j_1]\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1} \\
&\quad +2\sqrt{j_1j_2}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2}
\end{aligned}$$

nos produce $J^2\chi_{jm} = (j_1+j_2-1)(j_1+j_2)$; es decir, la función está asociada al valor de $j = j_1 + j_2 - 1$ (y $m = j_1 + j_2 - 1$).

Hemos entonces mostrado que

$$\chi_{j_1+j_2-1,j_1+j_2-1} = (\sqrt{2j_2}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} - \sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1})/\sqrt{2(j_1+j_2)}. \tag{4.13}$$

cogln1

De nuevo, aplicando J_- un número apropiado de veces nos permite obtener las $2(j_1 + j_2) - 1$ autofunciones de J^2 y J_z, asociadas a los valores de $m = j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2, \cdots - (j_1 + j_2 - 1)$. Veámos por ejemplo:

$$\begin{aligned}
J_-\chi_{j_1+j_2-1,j_1+j_2-1} &= \sqrt{2(j_1+j_2-1)}\chi_{j_1+j_2-1,j_1+j_2-2} \\
&= \frac{(J_{1-} + J_{2-})(\sqrt{2j_2}\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2} - \sqrt{2j_1}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-1})}{\sqrt{2(j_1+j_2)}},
\end{aligned}$$

la que luego de desarrollada el álgebra nos produce una función $\chi_{j=j_1+j_2-1,m=j_1+j_2-2}$ la cual toma la forma:

$$\frac{[\sqrt{j_2(2j_1-1)}\chi_{j_1,j_1-2}\chi_{j_2,j_2} + (j_2-j_1)\chi_{j_1,j_1-1}\chi_{j_2,j_2-1} + \sqrt{j_1(2j_2-1)}\chi_{j_1,j_1}\chi_{j_2,j_2-2}]}{\sqrt{(j_1+j_2)2(j+1+j_2-1)}} \tag{4.14}$$

4.2.4 Conjunto completo de valores de j

Continuando de la manera como se venía trabajando, es un asunto de conteo el probar que los valores posibles de j en el problema de adición de dos momentos angulares $\vec{J} = \vec{J}_1 \oplus \vec{J}_2$ es tal que

$$j = j_1 + j_2,\ j_1 + j_2 - 1, ; j_1 + j_2 - 2,\ \ldots |j_1 - j_2|. \tag{4.15}$$ clgocc

Lo anterior debido a la siguiente relación, la cual puede demostrarse por el método de inducción:

$$\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1), \tag{4.16}$$ cgos

la dimensión del espacio lineal de las autofunciones $\mathcal{Y}_{j_1 j_2 m_1 m_2}$, autofunciones de $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$.

4.3 Cuarentayunava lección

Estudiaremos en esta lección la adición de un momento angular arbitrario, con un momento angular de espín de valor $s = 1/2$. Calcularemos los coeficientes de Clebsh-Gordan para este problema e introduciremos la ecuación de Pauli, la cual es la generalización de la ecuación de Schrödinger para una partícula de espín 1/2.

4.3.1 Momento angular total

Vamos a considerar un sistema físico (un electrón) que tiene un momento angular orbital $\vec{L}$ arbitrario, cuya función de onda es proporcional a los esféricos armónicos $Y_{lm}(\Omega)$ para $l \neq 0$ un número entero arbitrario y m tomando los $2l+1$ valores $m = l, l-1, l-2, \ldots, -l$; y tiene además un momento angular intrínseco $\vec{S}$ (o espín) de valor 1/2, caracterizado por una función de onda $\phi_{1/2,m_s}$ para $m_s = \pm 1/2$.

Para este tipo de problemas se acostumbra definir el momento angular total $\vec{J}$ como el vector

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}, \tag{4.17}$$ jtot

vector que caracteriza la adición de dos momentos angulares, uno de ellos con valor máximo de su componente z igual a 1/2.

De conformidad a lo aprendido en las dos lecciones anteriores, las autofunciones del conjunto completo de operadores $\{L^2, S^2, L_z, S_z\}$ están dadas por las $2(2l+1)$ funciones $Y_{lm}(\Omega)\phi_{1/2,m_s}$, donde los autovectores $\phi_{1/2,m_s}$ corresponden a los dos espinores de Pauli:

$$\phi_{1/2,1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \phi_+ \qquad\qquad \phi_{1/2,-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \phi_- . \tag{4.18}$$

spau

Queremos ahora hallar las autofunciones y los autovalores del conjunto máximo de operadores $\{J^2, , L^2, S^2, J_z\}$. Como ya vimos, los autovalores de J^2 serán los valores $j(j+1)$ con $j = l + 1/2$ y $j = l - 1/2$, donde nótese que

$$\sum_{j=l-1/2}^{j=l+1/2} (2j+1) = 2(l-1/2) + 1 + 2(l+1/2) + 1 = 2(2l+1),$$

la dimensión del espacio de las funciones $Y_{lm}(\Omega)\phi_{1/2,m_s}$.

Utilizando la construcción que aprendimos en las dos lecciones anteriores tenemos para empezar que:

$$\chi_{l+1/2,l+1/2} = Y_{ll}(\Omega)\phi_+ = \begin{pmatrix} Y_{ll}(\Omega) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La aplicación del operador $J_- = L_- + S_-$ sobre esta función, con $S_-\phi_+ = \phi_-$ y $S_-\phi_- = 0$ nos produce

$$\begin{aligned} J_-(\chi_{l+1/2,l+1/2}) &= \sqrt{2l+1}\chi_{l+1/2,l-1/2} = \sqrt{2l}Y_{l,l-1}\phi_+ + Y_{ll}\phi_- \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2l}Y_{l,l-1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{ll} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2l}Y_{l,l-1} \\ Y_{ll} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

es decir:

$$\chi_{l+1/2,l-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{2l}Y_{l,l-1} \\ Y_{ll} \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

sl1

Una función ortonormal a la anterior, correspondiente al autovalor de $J^2 = (l-1/2)(l+1/2)$ y J_z igual a $l - 1/2$ sería:

$$\chi_{l-1/2,l-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} Y_{l,l-1} \\ -\sqrt{2l}Y_{l,l} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

sl2

La aplicación una vez más de J_-, ahora sobre la función $\chi_{l+1/2,l-1/2}$ en la ecuación (s11 4.19) nos produce

$$\chi_{l+1/2,l-3/2} = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} \begin{pmatrix} \sqrt{(2l-1)}Y_{l,l-2} \\ \sqrt{2}Y_{l,l-1} \end{pmatrix}. \qquad (4.21)$$ s13

Continuando de esta manera obtenemos finalmente el siguiente conjunto de funciones, autofunciones de $\{J^2, L^2, S^2, J_z\}$:
a: Para $j = l + 1/2$:

$$\begin{aligned} \chi^+_{l+1/2,m_j} &= \sqrt{\frac{l+1/2+m_j}{2l+1}} Y_{(l,m_j-1/2)}\phi_+ + \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{(l,m_j+1/2)}\phi_- \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+1/2+m_j}{2l+1}} Y_{l,m_j-1/2} \\ \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{l,m_j+1/2} \end{pmatrix}; \;\; m_j = l + \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, \cdots - (l + \frac{1}{2}); \end{aligned}$$

b: para $j = l - 1/2$

$$\begin{aligned} \chi^-_{l-1/2,m_j} &= \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{(l,m_j-1/2)}\phi_+ - \sqrt{\frac{l+1/2+m_j}{2l+1}} Y_{(l,m_j+/2)}\phi_- \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{l+1/2-m_j}{2l+1}} Y_{(l,m_j-1/2)} \\ -\sqrt{\frac{l+1/2+m_j}{2l+1}} Y_{(l,m_j+1/2)} \end{pmatrix}; \;\; m_j = l - \frac{1}{2}, l - \frac{3}{2}, \cdots - (l - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Las funciones $\chi^\pm_{jm_j}$ son conocidas en la literatura como esféricos armónicos espinoriales y son de grán utilidad en la literatura científica. Ellos satisfacen las relaciones

$$\begin{aligned} J^2\chi^\pm_{jm_j} &= j(j+1)\chi^\pm_{jm_j} \\ 2\vec{L}.\vec{S}\chi^\pm_{jm_j} &= (J^2 - L^2 - 3/4)\chi^\pm_{jm_j} \\ &= -(1+\kappa)\chi^\pm_{j,m_j}, \end{aligned}$$

donde

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) = -(j+1/2) & : \; j = l + 1/2 \\ +l = +(j+1/2) & : \; j = l - 1/2 \end{cases}.$$

Para un valor de j dado, χ^+ y χ^- tienen paridad opuesta ya que su valor de l difiere en uno (recuerde que la paridad de Y_{lm} es $(-1)^l$). Además, estas funciones cumplen la relación:

$$\chi^+_{jm_j} = \frac{2\vec{S}.\vec{r}}{r}\chi^-_{jm_j}, \quad \chi^-_{jm_j} = \frac{2\vec{S}.\vec{r}}{r}\chi^+_{jm_j} \qquad (4.22)$$ `prch`

4.3.2 Ecuación de Pauli

La ecuación de Pauli es la ecuación de ondas que satisface una partícula de espín 1/2 (un electrón por ejemplo) y que reemplaza a la ecuación de Schrödinger la cual es la ecuación de ondas de una partícula sin espín.

La forma matemática de esta ecuación es

$$i\hbar\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial t} = \hat{H}^{(p)}\psi^{(p)}, \qquad (4.23)$$ `pauli`

donde $\psi^{(p)}$ es un espinor de Pauli de dos componentes $\psi^{(p)T} = (\psi_1^{(p)}, \psi_2^{(p)})$ y $\hat{H}^{(p)}$ es el Hamiltoniano de Pauli el cual es una matriz 2×2 que tiene la forma

$$\hat{H}^{(p)} = \frac{1}{2m}[\vec{\sigma}.(\vec{p} - e\vec{A}/c)]^2 + e\phi, \qquad (4.24)$$ `paup`

donde $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ es el cuadripotencial de campo electromagnético, $\vec{\sigma}$ son las matrices espín de Pauli, c es la velocidad de la luz, y e y m son la carga eléctrica y la masa de la partícula respectivamente. Nótese que $e\phi = V(\vec{r})$ se puede identificar como la energía potencial de la partícula y $\vec{p} - e\vec{A}/c \equiv \vec{\pi}$ es la variable canónico conjugada a la posición en la presencia de un campo electromagnético caracterizado por el cuadrivector potencial electromagnético A^μ.

Utilizando las propiedades de las matrices de Pauli σ_a podemos escribir

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma}.(\vec{p}-e\vec{A}/c)]^2 &= (\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi}) = \sum_{l,n=1}^{3} \pi_l \pi_n \sigma_l \sigma_n \\
&= \sum_{l,n,k=1}^{3} \pi_l \pi_n (\delta_{ln} + i\epsilon_{kln}\sigma_k) = \pi^2 + i\vec{\sigma}.\vec{\pi}\times\vec{\pi} \\
&= (\vec{p}-e\vec{A}/c)^2 + i\vec{\sigma}.(\vec{p}-e\vec{A}/c)\times(\vec{p}-e\vec{A}/c).
\end{aligned}$$

Utilizando ahora

$$\begin{aligned}
(\vec{p}-e\vec{A}/c)\times(\vec{p}-e\vec{A}/c) &= \vec{p}\times\vec{p} + (e/c)^2\vec{A}\times\vec{A} - e\vec{p}\times\vec{A}/c - e\vec{A}\times\vec{p}/c \\
&= \frac{ie\hbar}{c}(\vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{A}\times\vec{\nabla}),
\end{aligned}$$

donde la última expresión es un operador que tiene sentido solo sí actúa sobre una función f. Haciendo ahora uso de la identidad vectorial

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}f) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})f - \vec{A}\times(\vec{\nabla}f),$$

obtenemos la expresión

$$(\vec{p}-e\vec{A}/c)\times(\vec{p}-e\vec{A}/c) = \frac{ie\hbar}{c}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \frac{ie\hbar}{c}\vec{B},$$

donde $\vec{B}$ (el rotacional de $\vec{A}$) es el campo magnético externo al cual se encuentra sometida la partícula. Obtenemos pues de esta manera la expresión

$$\begin{aligned}
[\vec{\sigma}.(\vec{p}-e\vec{A}/c)]^2 &= (\vec{p}-e\vec{A}/c)^2 - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma}.\vec{B} \\
&= p^2 + (e/c)^2A^2 - e\vec{A}.\vec{p}/c - e\vec{p}.\vec{A}/c - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma}.\vec{B} \\
&\approx p^2 - e\vec{A}.\vec{p}/c - e\vec{p}.\vec{A}/c - \frac{e\hbar}{c}\vec{\sigma}.\vec{B},
\end{aligned}$$

donde se han despreciado términos de segundo ordén en el vector potencial electromagnético $\vec{A}$.

Trabajando ahora en la llamada gauge de Coulomb ($\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$) y haciendo uso de la identidad

$$\begin{aligned}(\vec{A}.\vec{p} + \vec{p}.\vec{A})f &= -i\hbar(\vec{A}.\vec{\nabla} + \vec{\nabla}.\vec{A})f = -i\hbar[2\vec{A}.\vec{\nabla} + (\vec{\nabla}.\vec{A})]f \\ &= -2i\hbar\vec{A}.\vec{\nabla}f = 2\vec{A}.\vec{p}f,\end{aligned}$$

y trabajando para un campo magnético uniforme para el cual podemos escribir $\vec{A} = (\vec{B} \times \vec{r})/2$, lo cual implica que

$$(\vec{p} - e\vec{A}/c)^2 \approx p^2 - \frac{2e}{c}\frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}.\vec{p} = p^2 - \frac{e}{c}\vec{B}.\vec{r} \times \vec{p} = p^2 - \frac{e}{c}\vec{L}.\vec{B}.$$

De esta manera obtenemos finalmente la expresión

$$\hat{H}^{(p)} = \frac{I_2\hat{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc}(I_2\vec{L} + 2\vec{S}).\vec{B} + I_2V(\vec{r}). \tag{4.25}$$

hampau

donde I_2 es la matriz unidad 2×2 y la matriz de espín $\vec{S}$ esta dada por

$$\vec{S} = \hbar(\vec{u}_x\sigma_x + \vec{u}_y\sigma_y + \vec{u}_z\sigma_z)/2,$$

con σ_j las matrices espín de Pauli.

El Hamiltoniano de Pauli $\hat{H}^{(p)}$ en la ecuación (hampau 4.25) representa un electrón de spín $\vec{S}$ sometido a un campo magnético externo $\vec{B}$ el cual incluye la interacción del momento angular total (orbital y de espín) del electrón con el campo magnético externo. El factor de 2 en el término del espín, llamado el radio giromagnético del electrón, es un efecto netamente cuántico y no puede justificarse desde el punto de vista clásico.

4.4 Cuarentaydosava lección

En está lección haremos algunos desarrollos de importancia relacionados con el álgebra del momento angular. En particular introduciremos los símbolos 3-j, 6-j y 9-j; definiremos los operadores tensoriales irreducibles y enunciaremos el llamado teorema de Wigner-Eckart.

4.4.1 Símbolos seis jota

En la regla de adición de dos momentos angulares $\vec{J}_1 \oplus \vec{J}_2$, se determinan los valores posibles que puede tomar el momento angular total $\vec{J}$ para un sistema físico constituido de dos partículas de momentos angulares j_1 y j_2 respectivamente. Como ya mostramos en las lecciones anteriores, j puede tomar los valores $j_1+j_2,\ j_1+j_2-1,\ j_1+j_2-2,\ \ldots, |j_1-j_2|$. De igual manera mostramos que las funciones χ_{j,m_j}, autofunciones del conjunto completo de operadores $\{J^2, J_z, J_1^2, J_2^2\}$, están relacionadas con las funciones $\chi_{j_1,m_1}\chi_{j_2,m_2}$, autofunciones del conjunto completo de operadores $\{J_1^2, J_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$, mediante los llamados coeficientes de Clebsh-Gordan, los cuales estudiamos en las lecciones treinta y nueve y cuarenta. Es decir, vimos que

$$\begin{aligned} \chi_{j,m_j} &= \sum_{m_1,m_2} \mathcal{C}_{j,m_j}^{m_1,m_2}(j_1,j_2)\chi_{j_1,m_1}\chi_{j_2,m_2} \\ &= \sum_{m_1} \mathcal{C}_{j,m_j}^{m_1,m_j-m_1}(j_1,j_2)\chi_{j_1,m_1}\chi_{j_2,m_j-m_1}. \end{aligned}$$

De manera análoga, en la adición de tres momentos angulares $\vec{J} = \vec{J}_1+\vec{J}_2+\vec{J}_3$, las funciones χ_{j,m_j} autofunciones de J^2 y $J_z = J_{1z}+J_{2z}+J_{3z}$, estan relacionadas a las funciones $\chi_{j_1,m_1}\chi_{j_2,m_2}\chi_{j_3,m_3}$, autofunciones del conjunto máximo de operadores $\{J_1^2, J_2^2, J_3^2, J_{1z}, J_{2z}, J_{3z}\}$, mediante una ecuación que toma la forma

$$\chi_{j,m_j} = \sum_{m_1,m_2,m_3} \mathcal{C}_{j,m_j}^{m_1m_2m_3}(j_1,j_2,j_3)\chi_{j_1,m_1}\chi_{j_2,m_2}\chi_{j_3,m_3}, \qquad (4.26)$$ c6j

donde de nuevo una de las sumatorias es redundante ya que $m_j = m_1 + m_2 + m_3$. Los coeficientes $\mathcal{C}_{j,m_j}^{m_1m_2m_3}(j_1,j_2,j_3)$ en la expresión anterior, son los llamados en la literatura: "símbolos 6-j".

De manera análoga se definen los símbolos 9-j en la adición de cuatro momentos angulares y los símbolos 12-j en la adición de cinco momentos angulares; etc.

4.4.2 Símbolos 3-j

De especial relevancia y de gran aplicación en el cálculo de orbitales atómicos, son los símbolos 6-j para el caso particular en que $j = 0$ (lo cual implica de inmediato que $m = 0$). Definamos entonces

$$\mathcal{C}_{0,0}^{m_1 m_2 m_3}(j_1, j_2, j_3) \equiv \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \qquad (4.27) \quad \boxed{\texttt{3jot}}$$

Estos elementos así definidos son los llamados en la literatura símbolos tres jota de Wigner. Por definición, estos coeficientes son diferentes de cero solo si $m_1 + m_2 + m_3 = 0$. Como consecuencia de esta definición podemos entonces escribir

$$\chi_{00} = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \sum_{m_3=-j_3}^{j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \chi_{j_1 m_1}^{(1)} \chi_{j_2 m_2}^{(2)} \chi_{j_3 m_3}^{(3)}. \qquad (4.28) \quad \boxed{\texttt{3jo}}$$

Los símbolos tres jota están entonces asociados a un sistema físico de momento angular cero, constituido por tres partículas de momentos angulares j_1, j_2 y j_3, con sus respectivas proyecciones sobre el eje z dadas por los valores m_1, m_2 y m_3 respectivamente. La nulidad del momento angular total implica entonces que $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ y los valores de j_1, j_2 y j_3 son tales que cada par de ellos puede obtenerse por la adición vectorial de los otros dos. En otra palabras, j_1, j_2 y j_3 forman un triangulo cerrado los cuales deben de satisfacer relaciones como por ejemplo

$$|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2,$$

y permutaciones cíclicas de los subíndices $1, 2, 3$. De esta propiedad podemos entonces concluir que $j_1 + j_2 + j_3$ es un entero.

Una permutación de los índices $1, 2, 3$ en los coeficientes nos da un función que difiere de la no permutada solo en un factor irrelevante de fase. De manera simple es posible demostrar que

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{(j_1+j_2+j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \qquad (4.29) \quad \boxed{\texttt{pe3j}}$$

es decir, hay un cambio de signo cuando dos columnas son intercambiadas solo si $(j_1 + j_2 + j_3)$ es un número impar.

De igual manera es posible igualmente mostrar la relación

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{(j_1+j_2+j_3)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

me3j

Un álgebra simple nos permite relacionar los símbolos $3j$ de Wigner con los coeficientes de Clebsh-Gordan de la siguiente manera:

$$C_{j,m}^{m_1,m_2}(j_1, j_2) = (-1)^{(j_1-j_2+m)}\sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

3jcg

4.4.3 Operadores Tensoriales irreducibles

Para un sistema físico descrito por un momento angular $\vec{J} = \vec{u}_x J_x + \vec{u}_y J_y + \vec{u}_z J_z$, definimos un operador vectorial $\vec{V} = \vec{u}_x V_x + \vec{u}_y V_y + \vec{u}_z V_z$, como aquel operador que satisface el álgebra siguiente:

$$[J_a, V_b] = i\hbar \sum_c \epsilon_{abc} V_c, \quad a, b, c = x, y, z; \tag{4.32}$$

defve

donde ϵ_{abc} es la conocida densidad tensorial de Levi-Civitta. Como el vector $\vec{J}$ satisface también esta álgebra de conmutadores [el álgebra del grupo SU(2)], entonces igualmente $\vec{J}$ es un operador vectorial.

De manera análoga se define un operador escalar en mecánica cuántica como aquel operador $\hat{\phi}$ que conmuta con el vector momento angular, es decir que satisface $[\vec{J}, \hat{\phi}] = 0$.

La definición anterior de un operador vectorial cuántico está en las conocidas componentes cartesianas del vector, las cuales no son las componentes más apropiadas para ser usadas en sistemas cuánticos. De mucha mayor utilidad son las llamadas componentes esféricas de un vector (V_+, V_0, V_-) las cuales se definen como

$$V_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y), \quad V_0 = V_z, \tag{4.33}$$

coes

definición que nos permite establecer la siguiente relación entre los esféricos armónicos $Y_{1m}(\Omega)$ y las componentes esféricas del vector posición $\vec{r}$

$$Y_{1m}(\Omega) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{r_m}{r}, \quad m = \pm 1, 0. \tag{4.34}$$ $\boxed{\texttt{resf}}$

Utilizando ahora las definiciones de los operadores $J_\pm = (J_x \pm iJ_y)$ y $J_0 = J_z$, podemos escribir entonces los nueve conmutadores en (4.32) que me definen un operador vectorial, de la siguiente manera:

$$[J_0, V_0] = [J_-, V_-] = [J_+, V_+] = 0 \tag{4.35}$$

$$[J_+, V_-] = [J_-, V_+] = \sqrt{2}V_0 \tag{4.36}$$

$$[J_0, V_\pm] = \pm V_\pm, \quad [J_\pm, V_0] = \sqrt{2}V_\pm. \tag{4.37}$$

Aplicando las anteriores relaciones de conmutación para el caso particular de las componentes esféricas del vector posición r_m, las cuales haciendo uso de le relación (4.34) podemos definir como

$$r_m = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_{1m} \equiv T(1, m), \quad m = \pm 1, 0, \tag{4.38}$$ $\boxed{\texttt{refs}}$

tenemos entonces que

$$[J_0, T(1, m)] = mT(1, m), \tag{4.39}$$

$$[J_+, T(1, m)] = m\sqrt{(1 + m + 1)(1 - m)}T(1, m + 1), \tag{4.40}$$

$$[J_-, T(1, m)] = m\sqrt{(1 - m)(1 + m + 1)}T(1, m - 1), \tag{4.41}$$

las que no son más que un caso particular de unas relaciones de conmutación más generales entre las componentes esféricas del vector momento angular total $\vec{J}$ y un tensor esférico $T(l, m)$ el cual tiene $2l + 1$ componentes dadas por los valores de $m = l, l-1, l-2, \ldots, -l$. Estas relaciones, las cuales nos definen el operador tensorial irreducible $T(l, m)$ de rango l, fueron presentadas originalmente por Racah en 1942, son las siguientes:

$$[J_0, T(l, m)] = mT(l, m), \tag{4.42}$$

$$[J_+, T(l, m)] = m\sqrt{(l + m + 1)(l - m)}T(l, m + 1), \tag{4.43}$$

$$[J_-, T(l, m)] = m\sqrt{(l - m)(l + m + 1)}T(l, m - 1), \tag{4.44}$$

4.4.4 Teorema de Wigner-Eckart

Este teorema se refiere a la relación que existe entre los diferentes elementos matriciales de un operador tensorial $T(l,m)$ de rango l el cual tiene $2l+1$ componentes dadas por los posibles valores de $m = l, l-1, l-2, \ldots, -l$. Estos elementos matriciales están tomados entre los estados del sistema físico $\chi_{j_1 m_1}$ y los estados $\chi(j,m)$, en donde estos últimos estados se refieren a los estados correspondientes a la adición de los momentos angulares $\vec{J} = \vec{L} \oplus \vec{J}_1$ con un conjunto de valores posibles para j dados por: $j = l+j_1, l+j_1-1, \ldots, |l-j_1|$. Los únicos elementos matriciales diferentes de cero, de conformidad a la regla de adición de momentos angulares, se pueden escribir como:

$$\langle j m_j | T(l,m) | j_1 m_1 \rangle = \frac{(-1)^{l-j_1+j} \mathcal{C}^{m,m_1}_{j,m_j}(l,j_1)}{\sqrt{2j+1}} \langle j \| T(l) \| j_1 \rangle, \tag{4.45}$$

wigek

en donde $\langle j \| T(l) \| j_1 \rangle$ son los llamados elementos matriciales reducidos del operador tensorial $T(l,m)$ los cuales son independientes de los valores (m_j, m, m_1) y una vez calculados para un valor particular de estos números cuánticos se pueden utilizar para el cálculo de todos los elementos matriciales en (4.45), los cuales se obtienen de un mero conocimiento de los coeficientes de Clebsh-Gordan $\mathcal{C}^{m,m_1}_{j,m_j}(l,j_1)$, los cuales se pueden calcular de antemano u obtener de las tablas existentes para estos coeficientes.

Problemas

1: Halle las autofunciones simultáneas del conjunto máximo de operadores (J^2, J_z, J_1^2, J_2^2) para:
a: $j_1 = j_2 = 1/2$.
b: $j_1 = j_2 = 1$.

2: Demuestre que para un campo magnético constante podemos escribir $\vec{A} = (\vec{B} \times \vec{r})/2$.

3: Demuestre la relación (4.34).