

3 Dinámica Cuántica

Estudiaremos en este capítulo la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo y la aplicaremos en primera instancia a un ejemplo sencillo. Derivaremos igualmente la llamada segunda regla de oro de Fermi la cual aplicaremos al problema de ionización del átomo de hidrógeno.

3.1 Trigesimo séptima Lección

Abordemos ahora al estudio de las perturbaciones que dependen explícitamente del tiempo. Estrictamente no tiene sentido hablar ahora de correcciones a los valores propios de la energía, ya que para un Hamiltoniano que depende explícitamente del tiempo $\hat{H}(t)$, la energía no se conserva y no existen estados estacionarios. Sin embargo, si podemos partir el Hamiltoniano tal que $\hat{H}(t) = \hat{H}^0 + \hat{V}(t)$ con \hat{H}^0 independiente del tiempo, se puede entonces hablar de estados estacionarios para el Hamiltoniano no perturbado \hat{H}^0 y el problema que si podemos resolver es calcular de manera aproximada las funciones de onda del Hamiltoniano total $\hat{H}(t)$ en función de los estados estacionarios del sistema no perturbado, estudiando en concreto la probabilidad de transición entre dos estados estacionarios, transición producida por una perturbación $\hat{V}(t)$ que es diferente de cero solo en el intervalo de tiempo $0 \leq t < t_0$.

3.1.1 Variación de las constante

Introduciremos a continuación un método desarrollado por P. A. M. Dirac en 1926, conocido como el método de la variación de las constantes, en la solución de las ecuaciones diferenciales lineales.

Sean $\psi_k^0(\xi, t) = \psi_k^0(\xi)e^{-iE_k^0 t/\hbar}$ las funciones de onda (con su dependencia temporal explícita) de los estados estacionarios del sistema no perturbado; es decir, soluciones a la ecuación

$$\hat{H}^0 \psi_k^0(\xi, t) = i\hbar \frac{\partial \psi_k^0(\xi, t)}{\partial t} = E_k^0 \psi_k^0(\xi, t), \quad (3.1)$$

con ξ las coordenadas del espacio de configuración del problema físico. Entonces, toda solución $\phi(\xi, t)$ de la ecuación no perturbada, puede escribirse como la combinación lineal $\phi(\xi, t) = \sum_k a_k^0 \psi_k^0(\xi, t) = \sum_k a_k^0 e^{-iE_k^0 t/\hbar} \psi_k^0(\xi)$, con los coeficientes a_k^0 independientes del tiempo.

Nuestro problema será ahora buscar soluciones $\psi(\xi, t)$ a la ecuación diferencial que incluye la perturbación, es decir, soluciones a

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\xi, t)}{\partial t} = [\hat{H}^0 + \hat{V}(t)]\psi(\xi, t), \quad (3.2)$$

tales que las podamos expandir como

$$\psi(\xi, t) = \sum_k a_k(t) \psi_k^0(\xi, t) = \sum_k a_k(t) e^{-iE_k^0 t/\hbar} \psi_k^0(\xi), \quad (3.3)$$

donde los coeficientes en la expansión $a_k(t)$ tendrán ahora una dependencia temporal que vamos a determinar a continuación.

Substituyendo (3.3) en (3.2) y haciendo uso de (3.1) tenemos que

$$i\hbar \sum_k \left[\frac{da_k(t)}{dt} \right] \psi_k^0(\xi, t) = \sum_k a_k(t) \hat{V}(t) \psi_k^0(\xi, t), \quad (3.4)$$

donde $a_k(t)$ no depende de las coordenadas y su derivada parcial con respecto al tiempo se ha convertido en una derivada total. Multiplicando ahora a izquierda por $\psi_m^{0*}(\xi, t)$, integrando sobre todo el espacio de

configuración $d\xi$ y haciendo uso de la ortonormalidad de las funciones no perturbadas $\psi_k^0(\xi, t)$, obtenemos la ecuación

$$i\hbar \frac{da_m(t)}{dt} = \sum_k a_k(t) \int d\xi \psi_m^{0*}(\xi, t) \hat{V}(t) \psi_k^0(\xi, t) = \sum_k V_{mk}(t) a_k(t), \quad (3.5)$$

donde los elementos matriciales de la perturbación $V_{mt}(t)$ son de la forma

$$\begin{aligned} V_{mk}(t) &= \int d\xi \psi_m^{0*}(\xi, t) \hat{V}(t) \psi_k^0(\xi, t) \\ &= e^{i(E_m^0 - E_k^0)t/\hbar} \int d\xi \psi_m^{0*}(\xi) \hat{V}(t) \psi_k^0(\xi) = e^{i\omega_{mk}t} V_{mk}^0(t), \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $\omega_{mk} = (E_m^0 - E_k^0)/\hbar$ definida como la frecuencia de transición del estado m al estado k y los elementos matriciales de la perturbación $V_{mk}^0(t)$ tienen una dependencia temporal, debido a la dependencia temporal de la perturbación $\hat{V}(\xi, t)$ en la integral espacial sobre las funciones de onda $\psi_k^0(\xi)$ independientes del tiempo.

Hagamos ahora en (3.5) una expansión de los coeficientes $a_k(t)$ en términos de la perturbación $V(t)$; es decir, hagamos $a_k(t) = a_k^0 + a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + \dots$, con $a_k^{(j)}$ un parámetro de orden j en la perturbación $V(t)$. Guardando solo términos de primer orden en la perturbación $V(t)$ la ecuación (3.5) toma la forma

$$i\hbar \frac{d}{dt} [a_m^0 + a_m^{(1)}(t)] = i\hbar \frac{da_m^{(1)}(t)}{dt} \approx \sum_k V_{mk}(t) a_k^0, \quad (3.7)$$

y hallemos la corrección al n -ésimo estado para el cual se tiene que $a_k^0 = \delta_{kn}$ (es decir, empezamos por suponer que en $t \leq 0$, cuando la perturbación $V(t)$ no había empezado a actuar sobre el sistema, este se encontraba en el n -ésimo estado estacionario del Hamiltoniano no perturbado \hat{H}^0); lo cual reemplazado en la ecuación (3.5) nos produce finalmente la ecuación diferencial de primer orden en la variable temporal

$$i\hbar \frac{da_m^{(1)}}{dt} = V_{mn}(t) = e^{i\omega_{mn}t} V_{mn}^0(t), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n, \dots, \quad (3.8)$$

donde para ser consistentes con la notación usada, debieramos haber definido en la ecuación anterior $a_m^{(1)} \rightarrow a_{mn}^{(1)}$ donde se hace explícito el estado en el cual se hallaba el sistema físico antes de actuar la perturbación. Es decir, para ser consistentes debieramos haber usado desde un principio una expansión de la forma

$$\psi_n(\xi, t) = \sum_k a_{kn}(t) \psi_k^0(\xi, t).$$

Integrando la ecuación (3.8) obtenemos finalmente el conjunto infinito de coeficientes $a_{nm}^{(1)}$, que son las correcciones de primer orden en la perturbación $V(t)$ a la función de onda:

$$\begin{aligned} a_{mn}^{(1)} &= -\frac{i}{\hbar} \int dt V_{mn}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int dt V_{mn}^0(t) e^{i\omega_{mn}t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \neq n, \\ a_{nn} &= 1 + a_{nn}^{(1)} = 1 - \frac{i}{\hbar} \int dt V_{nn}^0(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde nótese que para la última integral se tiene que $\omega_{nn} = 0$.

3.1.2 Perturbación Armónica

Como un ejemplo sencillo empecemos por considerar una perturbación que depende del tiempo de manera armónica, que es de la forma

$$V(\xi, t) = \begin{cases} 0 & : -\infty < t < 0 \\ 2V^0(\xi) \sin(\omega t) & : 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & : t_0 < t < \infty, \end{cases} \quad (3.10)$$

la cual es una perturbación que actúa durante un intervalo de tiempo finito $0 < t < t_0$ y varía sinusoidalmente con el tiempo, con una frecuencia angular externa ω que actúa como un quantum de energía de Planck de valor $\hbar\omega$. Haciendo uso ahora de la identidad $\sin(\omega t) = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})/2i$ podemos hacer fácilmente la integral temporal y obtener

$$\begin{aligned} a_{mn}^{(1)}(t \geq t_0) &= -\frac{1}{\hbar} V(\xi)_{mn}^0 \int_0^{t_0} dt (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{i\omega_{mn}t} \\ &= \frac{iV(\xi)_{mn}^0}{\hbar} \left(\frac{e^{i(\omega_{mn}+\omega)t_0} - 1}{\omega_{mn} + \omega} - \frac{e^{i(\omega_{mn}-\omega)t_0} - 1}{\omega_{mn} - \omega} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

La estructura matemática de la expresión anterior sugiere que la amplitud de transición $a_{mn}^{(1)}(t \geq t_0)$ adquiere un valor apreciablemente significativo, solo cuando uno de los denominadores tiende a cero. El primer término será entonces importante solo cuando $\omega_{mn} \approx -\omega$; es decir, $E_m^0 \approx E_n^0 - \hbar\omega$ lo que significa una emisión del sistema de un quantum de energía de Planck, decayendo del estado n ésimo al estado m ésimo. El segundo término será importante solo cuando $\omega_{mn} \approx +\omega$; es decir, $E_m^0 \approx E_n^0 + \hbar\omega$ lo que significa una absorción de un quantum de energía de Planck del estado n ésimo para excitarse al estado m ésimo.

En aplicaciones prácticas $|a_{mn}|^2$ da la probabilidad de transición del estado n al estado m y el espectro de energía del Hamiltoniano no perturbado puede ser o discreto, o continuo, o mixto. De especial interés son las aplicaciones para las cuales el espectro es mixto, con un estado inicial tomado en el sector discreto y el estado final en el continuo (como ocurre en el problema de ionización de los átomos que estudiaremos en la próxima lección, o en los problemas nucleares de radiación alfa y beta).

3.2 Trigésimo octava lección

En esta lección derivaremos la llamada segunda regla de oro de Fermi y la aplicaremos en el problema de la ionización de un átomo de hidrógeno.

3.2.1 Segunda regla de oro de Fermi

Para la situación en la cual el estado inicial es discreto y de energía negativa y el estado final es continuo y de energía positiva (como ocurre para la ionización de un átomo o para la radiación alfa y beta de algunos núcleos radioactivos), entonces $E_m^0 > E_n^0$ y solo el segundo término en (3.11) es relevante. Para este caso la probabilidad de transición del

estado discreto n al estado m está dada por la expresión:

$$\begin{aligned}
 |a_{mn}|^2 &= \left| \frac{V(\xi)_{mn}^0}{\hbar} \left(\frac{e^{i(\omega_{mn}-\omega)t_0} - 1}{\omega_{mn} - \omega} \right) \right|^2 & (3.12) \\
 &= \frac{|V(\xi)_{mn}^0|^2}{\hbar^2} \left| \left(\frac{e^{i(\omega_{mn}-\omega)t_0/2} - e^{-i(\omega_{mn}-\omega)t_0/2}}{\omega_{mn} - \omega} \right) \right|^2 \\
 &= \frac{4|V(\xi)_{mn}^0|^2}{\hbar^2(\omega_{mn} - \omega)^2} \sin^2[(\omega_{mn} - \omega)t_0/2].
 \end{aligned}$$

Estando interesados en el límite en que $t_0 \rightarrow \infty$, podemos arreglar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$|a_{mn}|^2 = \frac{t_0 |V(\xi)_{mn}^0|^2}{\hbar^2} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right) \frac{\sin[(\omega_{mn} - \omega)t_0/2]}{(\omega_{mn} - \omega)/2} \quad (3.13)$$

donde hemos definido $\zeta = (\omega_{mn} - \omega)t_0/2$. Como igualmente queremos estados finales m que se encuentran en el continuo, es necesario multiplicar la expresión anterior por la densidad de estados finales $\rho(E_m)$ y sumar (integrar) sobre la totalidad de dichos estados; es decir, nuestra probabilidad de transición del estado n al estado m del continuo, toma entonces la forma

$$P_{mn} = \int dE_m |a_{mn}|^2 \rho(E_m).$$

Definimos ahora la rata de transición W_{mn} como la probabilidad de transición P_{mn} por unidad de tiempo, en el límite en que t_0 tiende a infinito. Es decir

$$\begin{aligned}
 W_{mn} &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{P_{mn}}{t_0} & (3.14) \\
 &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int dE_m \rho(E_m) \frac{|V(\xi)_{mn}^0|^2}{\hbar^2} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right) \left[\frac{\sin[(\omega_{mn} - \omega)t_0/2]}{(\omega_{mn} - \omega)/2} \right].
 \end{aligned}$$

Utilizando ahora la representación de la función delta de Dirac

$$\delta(x) = \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\sin(gx)}{\pi x},$$

podemos escribir la ecuación anterior como

$$W_{mn} = \pi \int dE_m \rho(E_m) \frac{|V(\xi)_{mn}^0|^2}{\hbar^2} \left(\frac{\sin \zeta}{\zeta} \right) \delta \left(\frac{\omega_{mn} - \omega}{2} \right). \quad (3.15)$$

Utilizando ahora la propiedad para la función delta de Dirac $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$ tenemos que

$$\delta[(\omega_{mn} - \omega)/2] = 2\hbar \delta(E_m - E_n - \hbar\omega),$$

la cual nos permite hacer la integral sobre los estados finales de energía y obtener finalmente la expresión

$$W_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \rho(E_m = E_n + \hbar\omega) |V(\xi)_{mn}^0|^2, \quad (3.16)$$

donde igualmente se ha utilizado el hecho que

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\sin \zeta}{\zeta} = 1,$$

como consecuencia de haber hecho la integral haciendo uso de propiedades de la función delta de Dirac, es decir, utilizando la propiedad

$$\int dx f(x) \delta(x) = f(0).$$

La expresión (3.16), presentada originalmente por Fermi en sus notas del curso de física nuclear y conocida en la literatura como “Segunda Regla de Oro de Fermi”, es de gran utilidad en las aplicaciones de la mecánica cuántica y vamos a hacer uso de ella en el cálculo que presentaremos a continuación.

3.2.2 Ionización de un átomo de hidrógeno.

Como un ejemplo de la utilización de la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo a primer orden, y de la segunda regla de oro de Fermi, calcularemos a continuación la probabilidad de ionización de un átomo de hidrógeno que se encuentra en su estado fundamental, cuando este es sometido a un campo eléctrico que varía armónicamente con el

tiempo (en la práctica tenemos el átomo de hidrógeno colocado entre las placas de un condensador el cual está conectado a una corriente alterna).

Nuestro campo eléctrico será entonces de la forma $\vec{E}(t) = 2\vec{E}_0 \sin(\omega t)$ con $|\vec{E}_0| = E_0$ constante y la frecuencia angular de oscilación del campo externo $\omega = 2\pi\nu$ mayor que la frecuencia asociada al estado fundamental del átomo de hidrógeno, para poder ionizar el átomo; es decir

$$\nu > \nu_0 = m_e e^4 / 4\pi\hbar^3 = 3.5 \times 10^{15} \text{ ciclos/segundo};$$

donde hemos utilizado el hecho que la energía fundamental del átomo de hidrógeno está dada por la expresión

$$|E_1| = e^4 m_e / 2\hbar^2 = \hbar\omega_0 = 2\pi\hbar\nu_0,$$

con m_e la masa del electrón, aproximadamente igual a la masa reducida.

La energía potencial dependiente del tiempo será entonces la perturbación en nuestro problema, la cual es de la forma

$$V(\vec{r}, t) = e\vec{E}(t) \cdot \vec{r} = 2e \sin(\omega t) \vec{E}_0 \cdot \vec{r} = 2e \sin(\omega t) E_0 r \cos \theta' = 2V^0(r) \sin(\omega t), \quad (3.17)$$

con $V^0(r) = eE_0 r \cos \theta'$, en donde θ' es el ángulo entre el vector \vec{E}_0 y el vector \vec{r} , el vector posición del electrón, para un núcleo situado en el origen del sistema de coordenadas como puede verse de la figura (3.2.2) y $E_0 = |\vec{E}_0|$ es el módulo del vector campo eléctrico.

Ahora, la función de onda del estado fundamental del átomo de hidrógeno es de la forma

$$\psi_n = \psi_{100} = (\pi a_0^3)^{-1/2} e^{-r/a_0},$$

con a_0 el radio de Bohr.

El estado final k del electrón, en el límite en que el tiempo de la perturbación tiende a infinito, es un estado de partícula libre, el cual podemos tomarlo normalizado en un cubo de lado L . Podemos entonces escribir la función de onda del estado final como

$$\psi_k(\vec{r}) = L^{-3/2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}},$$

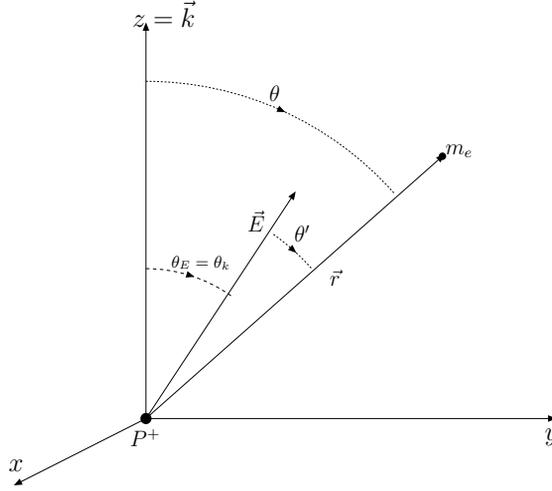


Figura 3.1: Variables para ionización de átomo de hidrógeno.

a la cual le asociamos la energía de partícula libre $E_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ y el vector número de onda \vec{k} el cual da la dirección de propagación del electrón saliente. Por conveniencia en nuestros cálculos escogeremos el eje z de nuestro sistema de coordenadas en la dirección del vector \vec{k} como lo muestra la figura.

Cálculo del elemento matricial

El elemento matricial $V(r)_{kn}^0$ independiente del tiempo que debemos insertar en (3.16) lo obtenemos de la expresión (3.17) y de las funciones de onda ψ_n y ψ_k dadas anteriormente. Este elemento matricial es de la forma

$$V_{kn}^0 = \frac{eE^0}{\sqrt{\pi a_0^3 L^3}} \int d^3r e^{-ikr \cos \theta} r \cos \theta' e^{-r/a_0} = \frac{eE^0}{\sqrt{\pi a_0^3 L^3}} \mathcal{I}, \quad (3.18)$$

con

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty r^3 dr e^{-r/a_0} \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{-ikr \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\phi \cos \theta',$$

donde θ es el ángulo entre los vectores \vec{k} y \vec{r} como se ve de la figura. Para hacer la integral anterior se toma la dirección del vector \vec{k} como el

eje azimutal (eje z , como lo dijimos anteriormente) lo cual implica que $d^3r = r^2 dr d\Omega = r^2 dr d\phi \sin \theta d\theta$. Igualmente hagamos uso del teorema de adición de los momentos angulares el cual me permite relacionar el ángulo θ' con θ_E y el ángulo de integración θ , donde $\theta_E = \theta_k$ es el ángulo entre el vector campo eléctrico \vec{E} y la dirección del vector de onda \vec{k} del electrón saliente. Dicho teorema aplicado al presente problema nos dice que

$$P_l(\cos \theta') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega_E) Y_{lm}(\Omega),$$

donde $P_l(x)$ son los polinomios de Legendre de argumento x y $P_1(x) = x$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} \cos \theta' &= \frac{4\pi}{3} [Y_{1,1}^*(\Omega_E) Y_{1,1}(\Omega) + Y_{1,0}^*(\Omega_E) Y_{1,0}(\Omega) + Y_{1,-1}^*(\Omega_E) Y_{1,-1}(\Omega)] \\ &= \cos \theta_E \cos \theta + \sin \theta_E \sin \theta \cos(\phi_E + \phi). \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso explícito de los siguientes esféricos armónicos: $Y_{1,\pm 1}(\Omega) = \mp (3/8\pi)^{1/2} \sin \theta e^{\pm i\phi}$, $Y_{1,0}(\Omega) = (3/4\pi)^{1/2} \cos \theta$.

La integración sobre el ángulo ϕ es entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi \cos \theta' &= \int_0^{2\pi} d\phi \cos \theta_E \cos \theta + \sin \theta_E \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \cos(\phi_E + \phi) \\ &= \cos \theta_E \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \cos \theta_E \cos \theta. \end{aligned}$$

De esta manera la integral \mathcal{I} en (3.18) toma la forma

$$\mathcal{I} = 2\pi \cos \theta_E \int_0^\infty r^3 dr e^{-r/a_0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-ikr \cos \theta}. \quad (3.19)$$

Para hacer ahora la integral sobre la variable θ hacemos la substitución de variable $x = kr \cos \theta$ lo cual implica $dx = -kr \sin \theta d\theta$, obteniendo luego de la integración por partes la expresión

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-ikr \cos \theta} = -2i \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} + i \frac{\cos(kr)}{(kr)}.$$

Haciendo finalmente la integral radial se obtiene la expresión

$$V_{kn}^0 = -\frac{32\pi i e E_0 k a_0^5 \cos \theta_E}{(\pi a_0^3 L^3)^{1/2} (1 + k^2 a_0^2)^3}, \quad (3.20)$$

cuyo módulo al cuadrado es

$$|V_{kn}^0|^2 = \frac{(32\pi e E_0 k a_0^5 \cos \theta_E)^2}{(\pi a_0^3 L^3)(1 + k^2 a_0^2)^6}, \quad (3.21)$$

expresión que debemos reemplazar en la ecuación (3.16).

Densidad de estados finales

Necesitamos enseguida evaluar la densidad de estados finales de una partícula libre de energía

$$E_k = \hbar^2 k^2 / 2m_e = E_1 + \hbar\omega = -m_e e^4 / 2\hbar^2 + \hbar\omega, \quad (3.22)$$

es decir, la densidad de estados para una partícula para la cual se satisface la relación de conservación de la energía. Esta densidad puede encontrarse del conteo de los valores permitidos del vector de ondas \vec{k} para una partícula en una caja de lado L , cuya fórmula de cuantización está dada por la relación $k_j = 2\pi n_j / L$, para $j = x, y, z = 0, 1, 2, 3, \dots$. Tenemos de esta manera que en el rango $dk_x dk_y dk_z = k^2 dk d\Omega_k$ habrá un número de estados d^3n dados por

$$\begin{aligned} \rho(k) dE_k &= dn_x dn_y dn_z = (L/2\pi)^3 dk_x dk_y dk_z \\ &= (L/2\pi)^3 k^2 dk d\Omega_k = (L/2\pi)^3 k^2 dk d\phi_k \sin \theta_k d\theta_k, \end{aligned}$$

con $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ la magnitud del vector número de onda el cual toma un valor constante debido a la ley de conservación de la energía y $d\Omega_k$ es el elemento infinitesimal de ángulo sólido en torno al vector \vec{k} , la dirección de salida del electrón la cual no está definida de manera unívoca.

Tenemos entonces que

$$\rho(k) dE_k = (L/2\pi)^3 k^2 dk d\phi_k d\Omega_k$$

con

$$dE_k = d(\hbar^2 k^2 / 2m_e) = \hbar^2 k dk / m_e,$$

lo cual implica finalmente que la densidad de estados finales entre \vec{k} y $\vec{k} + d\vec{k}$ que satisfacen la conservación de la energía implícita en la ecuación (3.22) y que están abarcadas en el ángulo sólido $d\Omega_k$ es

$$\rho(k) = \frac{m_e L^3}{8\pi^3 \hbar^2} k d\Omega_k. \quad (3.23)$$

Rata de ionización

Para obtener la probabilidad de ionización por unidad de tiempo, debemos de reemplazar las fórmulas (3.21) y (3.23) en (3.16), obteniendo de esta manera la expresión:

$$dW_{kn} = \frac{128m_e}{\pi^2 \hbar^2} \frac{(e^2 E_0^2 a_0^7 \cos^2 \theta_E)}{(1 + k^2 a_0^2)^6} k^3 d\Omega_k. \quad (3.24)$$

expresión que como puede verse es independiente de las dimensiones de la caja L y es proporcional a $\cos^2 \theta_E = \cos^2 \theta_k$, lo cual tiene como significado físico que la ionización tiende a producirse en la dirección del campo eléctrico que la induce. Para obtener la rata total de ionización W_{kn} debemos hacer la integración sobre el ángulo sólido $d\Omega_k = \sin \theta_k d\theta_k d\phi_k$, es decir

$$W_{kn} = \int dW_{kn} = \frac{128m_e}{\pi^2 \hbar^2} \frac{(e^2 E_0^2 a_0^7)}{(1 + k^2 a_0^2)^6} k^3 \int \cos^2 \theta_k d\Omega_k. \quad (3.25)$$

