

Capítulo 6

Modelo Estándar

6.1. Interacción Electrodébil para leptones

El Lagrangiano de Dirac para la primera generación de leptones representados por los campos ψ_e y ψ_ν , es

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{\nu}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_R - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - m_\nu(\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \quad (6.1)$$

donde

$$\psi_e \equiv e = e_L + e_R, \quad \psi_\nu \equiv \nu_e = \nu_L + \nu_R. \quad (6.2)$$

Este Lagrangiano debe dar cuenta de las características de las interacciones débiles.

Corrientes V–A

En dichas interacciones sólo participan las partes izquierdas de los campos. Esto nos permite prescindir del ν_R , pues no tiene cargas débiles, fuertes o eléctricas

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (6.3)$$

Simetría global $SU(2)_L \times U(1)_Y$

En el contexto de las interacciones débiles un e_L es completamente equivalente a un campo ν_L . Es decir, el Lagrangiano debe ser invariante bajo una transformación $SU(2)_L$ de esos campos. La diferencia entre ellos son sus respectivas cargas electricas y sus masas. Asumiendo que ambos campos tienen la misma hipercarga, podríamos esperar que la corriente electromagnética apropiada puede obtenerse a partir del Grupo semisimple $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Además las respectivas masas se podrían obtener a partir del mecanismo de Higgs. De hecho, definiendo el doblete

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

este transforma bajo $SU(2)_L$ como

$$\begin{aligned}
 L &\rightarrow L' = \exp(iT^i\theta_i)L \approx (1 + iT^i\theta_i)L \\
 \begin{pmatrix} \nu'_L \\ e'_L \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}}\right) \\ \frac{i}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}}\right) & 1 - i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^+ \\ \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^- & 1 - i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{i}{2}\right)\nu_L + \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^+e_L \\ \left(1 - \frac{i}{2}\right)e_L + \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^-\nu_L \end{pmatrix}. \tag{6.5}
 \end{aligned}$$

Claramente el término de masa m_e en la ec. (6.3) no es invariante bajo esta transformación. El Lagrangiano en la ec. (6.3), sin término de masa, puede reescribirse de manera que exhiba de forma más explícita la invariante bajo $SU(2)_L$ como

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu\partial_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R, \tag{6.6}$$

donde, bajo $SU(2)_L$ e_R transforma como

$$e_R \rightarrow e'_R = e_R. \tag{6.7}$$

Para que el Lagrangiano en la ec. (6.6) sea invariante gauge global bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$, se debe satisfacer la relación de Gell-man-Nishijima (3.224)

$$\begin{aligned}
 QL &= \begin{pmatrix} 0\nu_L \\ -1e_L \end{pmatrix} = (T_3 + Y)L = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + Y_L\right)\nu_L \\ \left(-\frac{1}{2} + Y_L\right)e_L \end{pmatrix} \\
 Qe_R &= -1e_R = Y e_R = Y_R e_R, \tag{6.8}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$Y_L = -\frac{1}{2} \qquad Y_R = -1. \tag{6.9}$$

Concluimos que para que la simetría gauge local bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ sea exacta se requiere que la hipercarga Y de ambas componentes del doblete sea la misma y que ambas tengan masa cero. Para tener un modelo consistente debe existir un mecanismo para generar la masa del electrón.

Simetría local $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Para que las cargas de isospín débil se conserven localmente debemos cambiar la derivada normal en el Lagrangiano (6.6) por la derivada covariante de $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$\begin{aligned}
 \partial^\mu &\rightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - igT^iW_i^\mu - ig'YB^\mu \\
 &= \begin{pmatrix} \partial^\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'YB_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial^\mu + igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'YB_\mu \end{pmatrix}. \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

y el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu e_R - \frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \tag{6.11}$$

es el Lagrangiano invariante gauge local más general posibles para los campos $e_{L,R}$, ν_L , W_i^μ , y B^μ . De acuerdo a la ec. (3.191)

$$W_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu + g \epsilon^{ijk} W_j^\mu W_k^\nu. \quad (6.12)$$

Para escribir el Lagrangiano en una forma compacta, debemos introducir una convención: siempre que los términos de \mathcal{D}^μ actúen en un estado fermiónico de forma matricial diferente, el resultado es cero por definición. Así el resultado de hacer actuar $T^i W_i^\mu$ sobre el singlete bajo $SU(2)_L$, e_R , es cero. Note que

$$\mathcal{D}_\mu e_R = (\partial_\mu - ig' Y_R B_\mu) e_R. \quad (6.13)$$

En la sección 3.6 vimos que para tratar consistentemente el electromagnetismo conjuntamente con el grupo gauge local $SU(2)$, era necesario suponer inicialmente la existencia de un bosón gauge B^μ asociado a un grupo $U(1)_Y$ en lugar del A^μ electromagnético asociado a $U(1)_Q$. El A^μ se puede obtener posteriormente a partir de una combinación lineal apropiada de B^μ y W_3^μ , el bosón gauge diagonal de $SU(2)$.

Mecanismo de Higgs

Como los bosones gauge W_i^μ deben ser masivos para dar cuenta de que la interacción débil es de corto alcance, el Lagrangiano en ec. (6.11) debe ser complementado con un potencial escalar apropiado que pueda dar lugar a una ruptura espontánea de la simetría. De acuerdo a la discusión del Capítulo 4 la escogencia mínima es introducir un doblete escalar complejo

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Entonces

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R - \frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (6.15)$$

donde $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$.

Los términos bosónicos en la ec. (6.15), ya fueran analizados en la sección 4.4, eq.(4.41).

Lagrangiano de Yukawa

Para los campos del Lagrangiano en eq. (6.15), debemos asegurarnos de que todos los términos invariantes gauge locales y renormalizables sean considerados. De hecho un término de interacción entre fermiones y el campo escalar, correspondiente a una interacción de Yukawa, resulta ser invariante gauge local. Incluyendo dicho término en el Lagrangiano invariante $SU(2)_L \times U(1)_Y$ para los campos e , ν_L , W_μ^i , B_μ y Φ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ & - h_e \bar{L}\Phi e_R - h_e \bar{e}_R \Phi^\dagger L \\ & - \frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Bajo una transformación gauge local los campos transforman como:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu L &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu L)' = \exp(-iT^i\theta_i - iY_L) \mathcal{D}_\mu L \\ \mathcal{D}_\mu e_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu e_R)' = \exp(-iY_R) \mathcal{D}_\mu e_R \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \exp(-iT^i\theta_i - iY_\Phi) \Phi,\end{aligned}\tag{6.17}$$

Y la acción determinada por el Lagrangiano en ec. (6.16) permanece invariante bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Parte de los términos del Lagrangiano ya han sido analizados en el Capítulo 4.

Gauge Unitario

Para obtener el espectro después de la ruptura espontánea de simetría es conveniente usar el Gauge Unitario para reescribir el campo de Higgs como en la ec. (4.48)

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}.\tag{6.18}$$

Usando los resultados de la sección 4.4 tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HWB} &= (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left(\frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \\ &\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu,\end{aligned}\tag{6.19}$$

donde:

■

$$\begin{aligned}V(H) &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4 \\ &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \frac{m_H^2}{2v} H^3 + \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{2v^2} H^4 \\ &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right).\end{aligned}\tag{6.20}$$

con

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2.\tag{6.21}$$

■

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix},\tag{6.22}$$

tal que

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e.\tag{6.23}$$

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (6.24)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HWB} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{g^2 v^2}{4v^2} (2vH + H^2) W^{\mu-} W_\mu^+ \\ &\quad + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu + \frac{1}{2v^2} \left(\frac{gv}{2 \cos \theta_W} \right)^2 (2vH + H^2) Z^\mu Z_\mu \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) + m_W^2 \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) Z^\mu Z_\mu. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Además

$$\mathcal{L}_{lWB} = i \bar{L} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i \bar{e}_R \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \quad (6.26)$$

Donde, usando el mismo procedimiento se obtiene el resultado análogo para la ec. (3.226)

$$\mathcal{L}_{lWB} = i \bar{L} \gamma^\mu [\partial_\mu - ig(T^1 W_\mu^1 + T^2 W_\mu^2) - i(gT^3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu)] L + i \bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig' Y B_\mu) e_R \quad (6.27)$$

Ya que

$$T^1 W_\mu^1 + T^2 W_\mu^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lWB} &= i \bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i \bar{e}_L \gamma^\mu \partial_\mu e_L + i \bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ &\quad + \bar{L} \gamma^\mu \left(\frac{g}{2} \tau_3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) L + g' \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R B_\mu e_R \end{aligned} \quad (6.29)$$

usando ec. (6.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lWB} &= i \bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\ &\quad \bar{L} \gamma^\mu \left[\frac{g}{2} \tau_3 (c_W Z_\mu + s_W A_\mu) + g' Y (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) \right] L + \\ &\quad g' \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) e_R \\ &= i \bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i \bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\ &\quad \bar{L} \gamma^\mu \left[\left(\frac{g c_W}{2} \tau_3 - g' s_W Y \right) Z_\mu + \left(\frac{g s_W}{2} \tau_3 + g' c_W Y \right) A_\mu \right] L \\ &\quad - g' s_W \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R Z_\mu e_R + g' c_W \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R A_\mu e_R \end{aligned} \quad (6.30)$$

usando ec. (6.23)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{lWB} &= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\
&\quad \bar{L} \gamma^\mu \left(\frac{g_{cW}}{2} \tau_3 - g \frac{s_W^2}{c_W} Y \right) LZ_\mu + e \bar{L} \gamma^\mu \left(\frac{\tau_3}{2} + Y \right) LA_\mu \\
&\quad - g \frac{s_W^2}{c_W} \bar{e}_R Y_R e_R Z_\mu + e \bar{e}_R Y_R e_R A_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\
&\quad \frac{g}{c_W} \bar{L} \gamma^\mu \left(c_W^2 \frac{\tau_3}{2} - s_W^2 Y \right) LZ_\mu + e \bar{L} \gamma^\mu Q LA_\mu \\
&\quad - g \frac{s_W^2}{c_W} \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R e_R Z_\mu + e \bar{e}_R \gamma^\mu Q e_R A_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\
&\quad + e \bar{e}_L \gamma^\mu Q e_L A_\mu + e \bar{e}_R Q e_R A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{s_W c_W} \bar{L} \gamma^\mu \left[(1 - s_W^2) \frac{\tau_3}{2} - s_W^2 Y \right] LZ_\mu - \frac{e}{s_W c_W} \bar{e}_R \gamma^\mu s_W^2 Y_R e_R Z_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) \\
&\quad + e \bar{e} P_R \gamma^\mu Q e P_L A_\mu + e \bar{e} P_L Q e P_R A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{s_W c_W} \bar{L} \gamma^\mu \left[\frac{\tau_3}{2} - s_W^2 Q \right] LZ_\mu - \frac{e}{s_W c_W} \bar{e}_R \gamma^\mu s_W^2 Y_R e_R Z_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) \\
&\quad + e \bar{e} \gamma^\mu Q e A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{2s_W c_W} \bar{L} \gamma^\mu [\tau_3 - 2Q s_W^2] LZ_\mu - \frac{e}{2s_W c_W} \bar{e}_R \gamma^\mu 2s_W^2 Q e_R Z_\mu
\end{aligned} \tag{6.31}$$

De modo que

$$\mathcal{L}_{lWB} = i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + i\bar{\nu}_e \gamma^\mu \partial_\mu \nu_e + \mathcal{L}_{cc} + \mathcal{L}_{nc} \tag{6.32}$$

donde

$$\mathcal{L}_{nc} = e J_{\text{EM}}^\mu A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} J_{\text{NC}}^\mu Z_\mu \tag{6.33}$$

donde ahora

$$J_{\text{EM}}^\mu = \bar{e} \gamma^\mu Q e = -\bar{e} \gamma^\mu e \tag{6.34}$$

y

$$J_{\text{NC}}^\mu = \sum_{\Psi=L,e_R} \bar{\Psi} \gamma^\mu (\tau^3 - 2Q \sin^2 \theta_W) \Psi. \tag{6.35}$$

En términos de los fermiones usuales

$$\begin{aligned}
J_{\text{NC}}^\mu &= \bar{L} \gamma^\mu [\tau_3 - 2Q s_W^2] L - \frac{e}{2s_W c_W} \bar{e}_R \gamma^\mu 2s_W^2 Q e_R \\
&= (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 + 2s_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R \gamma^\mu 2s_W^2 e_R \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu P_L \nu + \bar{e} \gamma^\mu (-1 + 2s_W^2) P_L e + \bar{e} \gamma^\mu 2s_W^2 P_R e \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_5}{2} \right) \nu + \bar{e} \gamma^\mu (-1 + 2s_W^2) \frac{(1 - \gamma_5)}{2} e + \bar{e} \gamma^\mu 2s_W^2 \frac{(1 + \gamma_5)}{2} e \\
&= \bar{\nu} \gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_5}{2} \right) \nu + \bar{e} \gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + 2s_W^2 + \frac{1}{2} \gamma_5 \right) e
\end{aligned} \tag{6.36}$$

$$J_{\text{NC}}^\mu = \sum_{f=e, \nu_e} \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f, \tag{6.37}$$

donde $2v_e = -1 + 4 \sin^2 \theta_W$, $2a_e = -1$, $v_{\nu_e} = a_{\nu_e} = 1$.

Igual que en el caso de $SU(3)_C$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cc} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^- + \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+] \\
&= \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^- + \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+]
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Para el término de Yukawa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fH} &= h_e (\bar{L} \Phi e_R + \bar{e}_R \Phi^\dagger L) \\
&= \frac{h_e}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) (H + v) \\
&= m_e \bar{e} e + \frac{h_e}{\sqrt{2}} \bar{e} e H \\
&= m_e \bar{e} e + m_e \bar{e} e \frac{H}{v} \\
&= m_e \bar{e} e \left(1 + \frac{H}{v} \right).
\end{aligned} \tag{6.39}$$

donde

$$m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}}. \tag{6.40}$$

De modo que el mismo mecanismo que da cuenta de la masa de los bosones gauge, da cuenta de la masa de los fermiones y entrega una interacción con la que se puede comprobar experimentalmente el modelo. Encontrar estas interacciones del Higgs con los fermiones y con los bosones gauge es el principal objetivo del LHC.

Como se vió en la sección 4.4 los términos cinéticos de los bosones gauge se pueden escribir en términos de W^\pm , Z_μ y A_μ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WB} &= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4
\end{aligned} \tag{6.41}$$

donde

$$(F_W)_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \quad (6.42)$$

y \mathcal{L}_3 y \mathcal{L}_4 están dados en [18]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu). \end{aligned} \quad (6.44)$$

En resumen el Lagrangiano invariante gauge local bajo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ dado en la ec. (6.16), escrito en el gauge unitario es ($f = e, \nu_e$, y tal que para $f = \nu_e$, $f' = e$)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H \\ & - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\ & + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{f=\nu_e} \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\ & - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ & - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu). \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde $m_{\nu_e} = 0$.

6.1.1. Dispersión electron–neutrino

Comparando con el Lagrangiano efectivo de la dispersión $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$ se obtiene

$$v = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV}. \quad (6.46)$$

6.2. Modelo Estándar

6.2.1. Primera generación

Introduciendo los quarks u y d , tenemos como contenido de partículas

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, & e_R \\ Q^\alpha &= \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix}, & u_R^a, \quad d_R^\alpha \end{aligned} \quad (6.47)$$

donde α es el índice de color. Productos del tipo $\overline{u_L}^\alpha u_L^\alpha$ serán denotados simplemente como $\overline{u_L} u_L$. Además

$$\begin{aligned} \nu_L &= P_L \nu_e, & e_{L,R} &= P_{L,R} e \\ u_{L,R} &= P_{L,R} u, & d_{L,R} &= P_{L,R} d. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Como antes, el término $\overline{Q}\Phi$ es invariante bajo $SU(2)_L$. Hemos mostrado en problema 3.6. que si $\overline{Q}\Phi$ es un invariante $SU(2)$, el término $\tilde{\Phi}^\dagger Q$ también es un invariante de $SU(2)$. Explícitamente

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^\dagger Q &= (i\tau_2 \Phi^*)^\dagger Q \\ &= \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}^\dagger Q \\ &= (\phi^0 \quad -\phi^+) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ &= \phi^0 u_L - \phi^+ d_L \\ &= \epsilon_{12} Q_1 \Phi_2 + \epsilon_{21} Q_2 \Phi_1 \\ &= \epsilon_{ab} Q_a \Phi_b. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Bajo una transformación $SU(2)_L$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^\dagger Q \rightarrow \tilde{\Phi}'^\dagger Q' &= \epsilon_{ab} Q'_a \Phi'_b = \epsilon_{ab} U_{ac} U_{bd} Q_c \Phi_d \\ &= \epsilon_{cd} \det \mathbf{U} Q_c \Phi_d \\ &= \epsilon_{cd} Q_c \Phi_d \\ &= \tilde{\Phi}^\dagger Q. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Las hipercargas se obtienen de

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u_L \\ -\frac{1}{3} d_L \end{pmatrix} &= (T_3 + Y_Q) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + Y_Q) u_L \\ (-\frac{1}{2} + Y_Q) d_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \times \phi^{0*} \\ -(-\phi^-) \end{pmatrix} &= (T_3 + Y_Q) \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + Y_{\tilde{\Phi}}) \phi^{0*} \\ (-\frac{1}{2} + Y_{\tilde{\Phi}}) (-\phi^-) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Entonces

$$Y_Q = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 1/6, \quad Y_{\tilde{\Phi}} = -\frac{1}{2}, \quad Y_{u_R} = \frac{2}{3}, \quad Y_{d_R} = -\frac{1}{3}. \quad (6.52)$$

Bajo hipercarga

$$\begin{aligned}\overline{Q}\Phi &\rightarrow e^{i(1/3)\alpha}\overline{Q}\Phi \\ \widetilde{\Phi}^\dagger Q &\rightarrow e^{i(2/3)\alpha}\widetilde{\Phi}^\dagger Q\end{aligned}\tag{6.53}$$

Entonces podemos construir los invariantes bajo $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= h_d \overline{Q}\Phi d_R + h_u \overline{u}_R \widetilde{\Phi}^\dagger Q + \text{h.c} \\ &= h_d \overline{Q}\Phi d_R + h_u \overline{u}_R \widetilde{\Phi}^\dagger Q + h_d \overline{d}_R \Phi^\dagger Q + h_u \overline{Q}\widetilde{\Phi} u_R \\ &= h_d \overline{Q}\Phi d_R + h_u \overline{Q}\widetilde{\Phi} u_R + \text{h.c}\end{aligned}\tag{6.54}$$

Recuerde que $\overline{Q}\Phi d_R = \overline{Q}_\alpha \Phi d_R^\alpha$. El Lagrangiano invariante gauge local bajo $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ es entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & i \sum_{\Psi=L,e_R,Q,u_R,d_R} \overline{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi \\ & - (h_e \overline{L}\Phi e_R + h_d \overline{Q}\Phi d_R + h_u \overline{Q}\widetilde{\Phi} u_R + \text{h.c}) \\ & - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.\end{aligned}\tag{6.55}$$

Donde

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_i^\mu - ig' Y B^\mu.\tag{6.56}$$

En el gauge unitario

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix} \quad \widetilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \\ 0 \end{pmatrix},\tag{6.57}$$

$f =$	u	d	ν_e	e
$\frac{2v_f}{2a_f}$	$1 - \frac{8}{3}\sin^2\theta_W$	$-1 + \frac{4}{3}\sin^2\theta_W$	1	$-1 + 4\sin^2\theta_W$
	1	-1	1	-1

Tabla 6.1: Acoplamientos de corrientes neutras

y utilizando los resultados para la Cromodinámica Cuántica de la sección 5.3, el Lagrangiano para $f = \nu_e, e, u, d$, $q = u, d$ y $f' = e$ (d) para $f = \nu_e$ (u) es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_f \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\
& - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \tag{6.58}
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu \tag{6.59}$$

En la tabla 6.1 se muestran los acoplamientos de las corrientes neutras.

6.2.2. Dinámica de sabor

El Modelo Estándar esta compuesto de las siguientes tres familias de fermiones $i = 1, 2, 3$. A cada familia se le asigna una carga de *sabor* diferente

$$\begin{aligned}
L_i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix} : \quad & L_1 = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} & L_2 = \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} & L_3 = \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} & e_R^i : e_R, \mu_R, \tau_R \\
Q_i^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^{\alpha} \\ d_L^{\alpha} \end{pmatrix} : \quad & Q_1^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix} & Q_2^\alpha = \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix} & Q_3^\alpha = \begin{pmatrix} t_L^\alpha \\ b_L^\alpha \end{pmatrix} & u_R^i : u_R, c_R, t_R \\
& & & & d_R^i : d_R, s_R, b_R. \tag{6.60}
\end{aligned}$$

Con

$$Y_{L_i} = -\frac{1}{2} \quad Y_{Q_i} = \frac{1}{6} \quad Y_{e_R^i} = -1 \quad Y_{u_R^i} = \frac{2}{3} \quad Y_{d_R^i} = -\frac{1}{3}. \tag{6.61}$$

De los procesos entre familias, es decir de cambio de sabor, sabemos que

- No se han observado procesos de corrientes neutras que cambian sabor.
- Los bosones gauge cargados W_μ^\pm decaen siempre a leptones de la misma generación y con la misma intensidad.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_i \left(\overline{Q}'_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu Q'_i + \overline{L}'_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L'_i + \overline{e_R}^i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R^i + \overline{d_R}^i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R^i + \overline{u_R}^i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R^i \right) \\ & - (h_{ij}^E \overline{L}'_i \Phi e_{Rj}' + h_{ij}^D \overline{Q}'_i \Phi d_{Rj}' + h_{ij}^U \overline{Q}'_i \tilde{\Phi} u_{Rj}' + \text{h.c}) \\ & - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Para aclarar la notación, obviando de momento la definición definitiva de h_{ij} y las primas sobre los campos, consideremos el Lagrangiano de Yukawa para el sector down

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & h_{ij}^D \overline{d_{Ri}} \Phi^\dagger Q_j + \text{h.c} \\ & \supset h_{ij}^D \overline{d_{Ri}} \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a Q_j^b + \text{h.c} \\ & \supset h_{ij}^D \epsilon_{ab} \overline{d_{Ri}}^\alpha \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^b + \text{h.c} \\ & \supset h_{ij}^D \epsilon_{ab} (d_{R\eta}^\dagger)_i^\alpha \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha\rho}^b + \text{h.c}, \end{aligned} \quad (6.63)$$

donde i, a, α, η son índices en los espacios de familia, $SU(2)_L$, $SU(3)_c$ y de Dirac, respectivamente. Por ejemplo el primer termino de la sumatoria

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & h_{11}^D (d_{R\eta}^\dagger)_1 \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^1 Q_{11\rho}^2 + \dots \\ & \supset h_{11}^D \overline{d_R}^r \phi^{0*} d_L^r + \dots \end{aligned} \quad (6.64)$$

corresponde a la interacción de Yukawa del quark down rojo (r) con un campo escalar complejo neutro en carga eléctrica pero de isospín débil $1/2$. En forma compacta la primera expresión en la ec. (6.63) puede escribirse como

$$\mathcal{L} \supset \overline{\mathbf{d}_R} \mathbf{h}^D \Phi^\dagger \mathbf{Q} + \overline{\mathbf{Q}_L} \Phi \mathbf{h}^{D\dagger} \mathbf{d}_R \quad (6.65)$$

Retornado a la ec. (6.62), tenemos que para definir apropiadamente la masa de los quarks, rotamos de los autoestados de interacción a los autoestados de masa con la matrices unitarias

$$d_{R,Lj}' = (V_{R,L}^D)_{jk} d_{R,Lk} \quad \overline{d_{R,Lj}'} = \overline{d_{R,Lk}} (V_{R,L}^{D\dagger})_{kj} \quad (6.66)$$

Tal que

$$(V_{R,L}^{D\dagger})_{ij} (V_{R,L}^D)_{jk} = \delta_{ik} \quad (V_L^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_R^D)_{jl} = m_k^D \delta_{kl} \quad (6.67)$$

Con definiciones similares para los campos u_i y e_i .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &\supset \overline{d'_{Li}} \frac{h_{ij}^D v}{\sqrt{2}} d'_{Rj} \\
&= \overline{d'_{Li}} M_{ij}^D d'_{Rj} \\
&= \overline{d_{Lk}} (V_L^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_R^D)_{jl} d_{Rl} \\
&= \overline{d_{Lk}} m_k^D \delta_{kl} d_{Rl} \\
&= m_k^D \overline{d_{Lk}} d_{Rk}
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Para las diferentes combinaciones de términos de corrientes

$$\begin{aligned}
\overline{u'_{Li}} \gamma^\mu d'_{Li} &= \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^U)_{il} d_{Ll} \\
&= V_{kl} \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu d_{Ll} \\
\overline{\nu'_{Li}} \gamma^\mu e'_{Li} &= \overline{\nu_{Lj}} \gamma^\mu (V_L^E)_{ij} e_{Lj} \\
&= \overline{\nu_{Lj}} (V_L^E)_{ij} \gamma^\mu e_{Lj} \\
&= \overline{\nu_{Lj}} \gamma^\mu e_{Lj}
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Donde hemos definido la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) como

$$\begin{aligned}
V &= V_L^{U\dagger} V_L^D \\
V^\dagger V &= V_L^{D\dagger} V_L^U V_L^{U\dagger} V_L^D = \mathbf{1} \Rightarrow \sum_j V_{ij}^\dagger V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j V_{ji}^* V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j |V_{ji}|^2 = \sum_j |V_{ij}|^2 = 1
\end{aligned} \tag{6.70}$$

y los autoestados débiles de los neutrinos como

$$\nu'_{Li} = (V_L^{E\dagger})_{ij} \nu_{Lj} \tag{6.71}$$

Con esta definición, las corrientes débiles cargadas para los leptones siguen siendo universales. Similarmente

$$\begin{aligned}
\overline{u'_{Li}} \gamma^\mu u'_{Li} &= \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^U)_{il} u_{Ll} \\
&= \delta_{kl} \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu u_{Ll} \\
&= \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu u_{Lk}
\end{aligned} \tag{6.72}$$

De modo que todas las corrientes neutras permanecen universales después de la redefinición de los campos fermiónicos. A éste resultado, basado en la unitariedad de las transformaciones biunitarias se le llama *Mecanismo GIM*. En muchas extensiones del Modelo Estándar las matrices que transforman los fermiones a sus autoestados de masa no son unitarias y dan lugar a corrientes débiles neutras que cambian sabor (FCNC de sus siglas en inglés). Este tipo de procesos sin embargo, aún no han sido observados.

Teniendo en cuenta estos resultados podemos escribir finalmente el Lagrangiano completo del Modelo Estándar en la Gauge Unitario, para

$$f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b; \quad q = u, c, t, d, s, b; \quad l = e, \mu, \tau \tag{6.73}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SM}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{l=e}^{\tau} \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \sum_{ij} V_{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_j W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\
& - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \tag{6.74}
\end{aligned}$$

donde $m_{\nu_l} = 0$.

6.3. Fenomenología Electrodébil

El Lagrangiano del Modelo contiene los parámetros $g_s, g, \sin \theta_W, v, m_H$. Alternativamente uno puede escoger como parámetros, en lugar de $g, \sin \theta_W, v$ [5]

$$\begin{aligned}
G_F &= 1.166\,371(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \\
\alpha^{-1} &= 137.035\,999\,679(94) \\
m_Z &= 91.1876(20) \text{ GeV} \\
\alpha_s(m_Z) &= 0.1176(20). \tag{6.75}
\end{aligned}$$

donde $\alpha_i = g_i^2/(4\pi)$. Esto tiene la ventaja de usar las tres cantidades experimentales mejor medidas. Las relaciones

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}, \quad m_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F} \tag{6.76}$$

determinan entonces

$$\begin{aligned}
\sin^2 \theta_W &= 0.212 \\
m_W &= 80.94 \text{ GeV} \tag{6.77}
\end{aligned}$$

Si se usa $\alpha(M_Z) \approx 1/128$ entonces

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_W &= 0.233 \\ m_W &= 79.84 \text{ GeV}\end{aligned}\tag{6.78}$$

Los valores medidos son $\sin^2 \theta_W = 0.23149(13)$, $m_W = 80.398(25) \text{ GeV}$, y pueden ser reproducidos por el modelo estándar una vez se tienen en cuenta correcciones perturbativas inducidas por partículas virtuales.

El acelerador e^+e^- LEP, que funcionó hasta desde 1998 hasta el 2000 [27], operó a energías suficientes para producir millones de Z . Combinado con otros resultados experimentales, se pudo verificar todo el Lagrangiano del Modelo Estándar hasta un nivel del 1 por mil. Con excepción de las interacciones asociadas con el Higgs.

La universalidad de los decaimientos del Z está soportada por los resultados experimentales siguientes donde sólo se muestran los decaimientos leptónicos del Z diferentes de cero [5]

$$\begin{aligned}\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= 83.92(12) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 83.99(18) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 84.08(22) \text{ MeV} \\ \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= 3.363(4) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 3.366(7) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 3.370(8) \%\end{aligned}\tag{6.79}$$

Mientras que para el W^\pm , en %,

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = 10.65(17), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) = 10.59(15), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\tau \tau^-) = 11.44(22)\tag{6.80}$$

La diferencia de $\bar{\nu}_\tau \tau$ respecto a los otros representa un efecto a 2.8σ . La universalidad de los acoplamientos leptónicos de W puede comprobarse también indirectamente a través de los decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas. Los datos actuales verifican la universalidad de los acoplamientos de corrientes cargadas leptónicas al nivel del 0.2 % [5]. Sin necesidad de entrar en detalles de los cálculos de las amplitudes de decaimiento, podemos usar el hecho de que ellas son proporcionales a los acoplamientos al cuadrado correspondiente, de modo que un cociente entre amplitudes de decaimiento es igual, en primera aproximación, a los cocientes de los acoplamientos al cuadrado. Tendremos en cuenta además que el Branching es la amplitud de decaimiento a un canal específico dividido por la suma de las amplitudes de decaimiento a todos los canales posibles.

Para los decaimientos del Z el Modelo Estándar predice, además de la ausencia de eventos del tipo $Z \rightarrow e^+ \mu^-$, que para un cierto $l = e, \mu, \tau$, o $q = d, s, b$

$$\begin{aligned}\frac{\text{Br}(Z \rightarrow l^+ l^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{q} q)} &\approx \frac{(|v_l|^2 + |a_l|^2)}{N_c(|v_q|^2 + |a_q|^2)} \\ &= \frac{\left[\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right]}{N_c \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right]} \\ &\approx \frac{0.776}{N_c} = \begin{cases} 0.338 & N_c = 2 \\ 0.225 & N_c = 3 \\ 0.169 & N_c = 4 \end{cases}\end{aligned}\tag{6.81}$$

Para ser comparado con el resultado experimental de por ejemplo

$$\frac{\text{Br}(Z \rightarrow e^+ e^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow b \bar{b})} = \frac{3.363(4)}{15.12(5)} \approx 0.222\tag{6.82}$$

que de nuevo da lugar al $N_c = 3$, que seguiremos tomando en adelante.

Los Branchings de decaimiento en la ec. (6.80) y ec. (6.79) pueden ser calculados sin entrar en detalles del cálculo de las amplitudes. Teniendo en cuenta que el canal $Z \rightarrow t\bar{t}$ esta cerrado

$$\begin{aligned}
\text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= \frac{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \\
&= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{\sum_l [(|v_l|^2 + |a_l|^2) + (|v_{\nu_l}|^2 + |a_{\nu_l}|^2)] + N_c [\sum_{i=1}^2 (|v_{u_i}|^2 + |a_{u_i}|^2) + \sum_{i=1}^3 (|v_{d_i}|^2 + |a_{d_i}|^2)]} \\
&= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{3[(|v_e|^2 + |a_e|^2) + (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)] + 3[2(|v_u|^2 + |a_u|^2) + 3(|v_d|^2 + |a_d|^2)]} \\
&= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{21|a_e|^2 + 3[|v_e|^2 + |v_{\nu_e}|^2] + 3[2|v_u|^2 + 3|v_d|^2]} \\
&= \frac{(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1}{21 + 3[(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1] + 3[2(1 - \frac{8}{3}s^2\theta_W)^2 + 3(-1 + \frac{4}{3}s^2\theta_W)^2]} \\
&= \frac{2 - 8s^2\theta_W + 16s^4\theta_W}{42 - 80s^2\theta_W + \frac{320}{3}s^4\theta_W} \\
&\approx 3.43 \%
\end{aligned} \tag{6.83}$$

Para W^\pm tenemos por ejemplo

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{\Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \tag{6.84}$$

donde, teniendo en cuenta que los canales a top están cerrados, y usando la condición de unitariedad de la matriz CKM en ec. (6.70), tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{total}} &= \sum_l \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_l l^-) + N_c \sum_i [\Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_1 d_i) + \Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_2 d_i)] \\
&= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) \{3 + N_c \sum_i [|V_{1i}|^2 + |V_{2i}|^2]\} \\
&= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) (3 + 2N_c)
\end{aligned} \tag{6.85}$$

entonces

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3 + 2N_c} = 11.1 \% \tag{6.86}$$

Una mejor predicción de dichos resultados en el contexto del Modelo Estándar requiere tener en cuenta las correcciones radiativas.

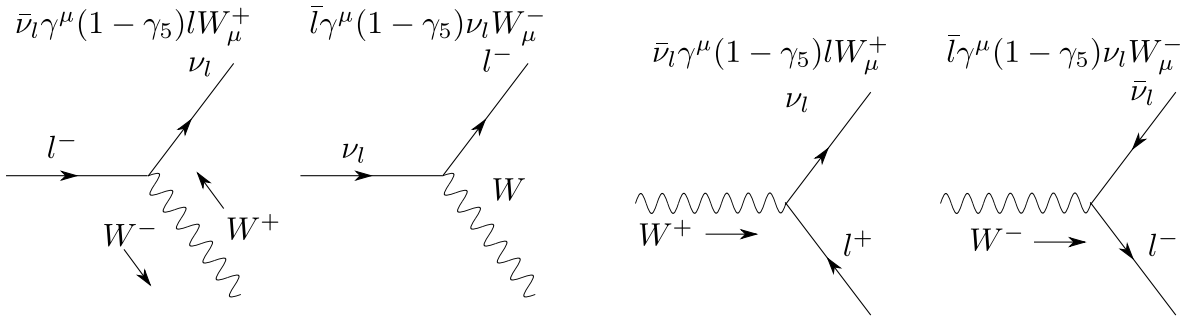


Figura 6.1: Diagramas de Feynman para las corrientes cargadas

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} &= \frac{\sum_l \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\
 &= \frac{N_\nu \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\
 &\approx \frac{N_\nu (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)}{|v_e|^2 + |a_e|^2} \\
 &= \frac{2N_\nu}{(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)^2 + 1} \\
 &\approx \begin{cases} 5.865 & N_\nu = 3 \\ 7.819 & N_\nu = 4 \end{cases}, \quad (6.87)
 \end{aligned}$$

mientras que el valor medido experimentalmente para esta cantidad 5.942(16) [5], es una evidencia muy fuerte de que sólo existen tres neutrinos livianos.

6.3.1. Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas

De la corrientes cargadas para leptones tenemos

$$\mathcal{L}_{cc} \supset \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_l W_\mu^- \right] \quad (6.88)$$

Esto da lugar a los posibles diagramas para decaimientos de leptones a bosones virtuales, y bosones a leptones mostrados en la figura 6.1. Las flechas representan el flujo de número leptónico. La flecha de tiempo es de izquierda a derecha. Al lado izquierdo del vértice entran partículas y salen antipartículas. Mientras que al lado derecho entran antipartículas y salen partículas. Del primer y cuarto diagrama obtenemos el diagrama de Feynman para el decaimiento $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$, mostrado en la figura 6.2. El propagador para el bosón W de momentum q resulta ser

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right). \quad (6.89)$$

Para los propósitos actuales la obtención de este resultado no es necesaria, el punto importante es que cuando las masas de las partículas iniciales y finales son mucho más pequeñas que m_W , esto se

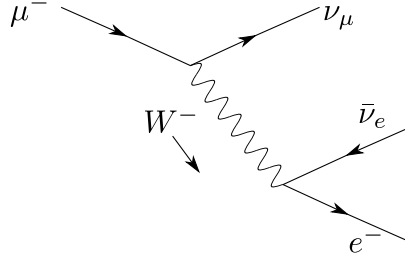


Figura 6.2: diagrama de Feynman para el decaimiento $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$

reduce a

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}. \quad (6.90)$$

Este resultado se entiende fácilmente cuando se compara con el propagador de una partícula escalar masiva $1/(q^2 - M^2) \rightarrow -1/M^2$. Las componentes espaciales de W_μ con $\mu = 1, 2, 3$, a bajas energías tienen el mismo propagador que el de una partícula escalar, mientras W_0 , tiene el signo opuesto.

El Lagrangiano efectivo para el decaimiento del muón, $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{g^2}{8m_W^2} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e], \end{aligned} \quad (6.91)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8m_W^2} \\ &= \frac{g^2 4}{8g^2 v^2} \\ &= \frac{1}{2v^2}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

y

$$v = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1/2}. \quad (6.93)$$

De otro lado, para el decaimiento β , $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, de acuerdo a la figura 6.3, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} [\bar{p} \gamma^\mu (1 - 1.26 \gamma_5) n] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e]. \quad (6.94)$$

con G_F dado en la ec. (6.75) y $G_\beta = 1.10 \times 10^{-5} \text{ GeV}^2$. La corriente hadrónica tiene la forma V-1.26A. El factor 1.26 puede entenderse como debido a las correcciones a nivel hadrónico de una corriente que es de la forma V-A a nivel de quarks, como en la ec. (6.74). A nivel de quarks el decaimiento

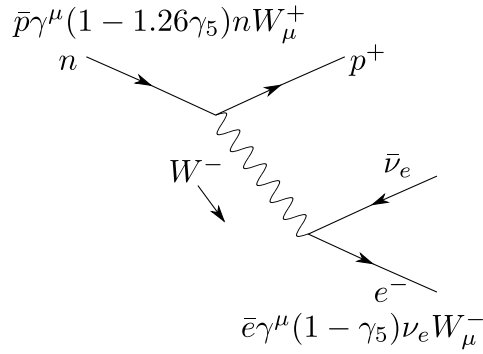


Figura 6.3: Decaimiento del neutrón.

del neutrón (udd) al protón (uud) corresponde al decaimiento de uno de los quarks down del neutrón $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{11} [\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d] [\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e] . \quad (6.95)$$

De modo que $G_\beta = G_F V_{11} = G_F \cos \theta_C$, donde θ_C es el ángulo de Cabbibo. Una vez se tienen en cuenta correcciones electrodébiles se obtiene el valor $|V_{11}| = 0.97418(27)[23]$. Las magnitudes de los elementos de la matriz CKM son[23]

$$V \approx \begin{pmatrix} 0.97419 & 0.2257 & 0.0359 \\ 0.2256 & 0.97334 & 0.0415 \\ 0.00874 & 0.0407 & 0.999133 \end{pmatrix} \sim \mathbf{1} \quad (6.96)$$

6.4. Cálculo de procesos

Se remite al lector al lector a la siguiente parte del curso “Standard Model and beyond”, de la página web

<http://gfif.udea.edu.co:2500>

En particular a las secciones iniciales de los Capítulos 1 y 2 donde se analizan el decaimiento $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$ y el decaimiento del muon.

6.5. Problemas

1. Demuestre explícitamente la ec. (6.33)