

Capítulo 5

Fermiones

5.1. Ecuación de Dirac

5.1.1. Fermiones de Weyl

Sea ψ un campo que satisface una ecuación covariante de segundo orden. La parte cinética del Lagrangiano sin términos de masa y sin términos de interacción debe tener la forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi - m\psi^\dagger b\psi \quad (5.1)$$

La Acción debe ser real, de modo que el Lagrangiano también. En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left(\frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi \right)^\dagger - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \left(-\frac{i}{2}\partial^\mu \psi^\dagger a_\mu^\dagger \psi + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \right) - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \mathcal{L} \quad \text{si } b^\dagger = b. \end{aligned}$$

Como al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este Lagrangiano debemos obtener la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (5.2)$$

con \hat{H} una función por determinar del operador $\hat{\mathbf{p}}$, entonces

$$a_\mu^\dagger = a_\mu \quad (5.3)$$

El Lagrangiano en ec. (5.1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \\ &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) - m\psi^\dagger b\psi \\ \mathcal{L} &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ahora utilizaremos el método desarrollado en capítulos anteriores para analizar el Lagrangiano. Calcularemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la corriente conservada y el tensor de momento-energía.

5.1.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac

De la ec. (5.4)

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^\dagger \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \right] \\ &= i \psi^\dagger a^0 \delta \psi \end{aligned} \quad (5.5)$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de fase globales, $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi \approx \psi - i\alpha \psi, \quad (5.6)$$

de modo que

$$\delta \psi = -i\alpha \psi. \quad (5.7)$$

Por consiguiente

$$J^0 = \alpha \psi^\dagger a^0 \psi \quad (5.8)$$

Para que J^0 pueda interpretarse como una densidad de probabilidad, debemos redefinir el Lagrangiano en ec. (5.1) como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} b \psi, \quad (5.9)$$

tal que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger c, \quad (5.10)$$

con

$$c \gamma^0 = I \quad (5.11)$$

Para que este nuevo Lagrangiano sea real se requiere que,

$$\begin{aligned} c^2 &= I \\ c \gamma_\mu^\dagger c &= \gamma_\mu \\ c b^\dagger c &= b \end{aligned} \quad (5.12)$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger b^\dagger c \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger c^2 b^\dagger c \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \bar{\psi} c b^\dagger c \psi \\ &= \left(\frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} b \psi \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos hacer $b = I$, y

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (5.13)$$

La nueva corriente conservada contiene

$$\begin{aligned}
 J^0 &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \right] \\
 &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\
 &= \psi^\dagger c \gamma^0 \psi \\
 &= \psi^\dagger \psi
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad. $\bar{\psi}$ se define como la *adjunta* de ψ .

En general

$$\begin{aligned}
 J^\mu &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] \\
 &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger c \gamma^\mu \Psi \tag{5.16}$$

5.1.3. Tensor momento-energía

$$\begin{aligned}
 T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} - \mathcal{L} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\
 &= -i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi, \\
 &= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
 &= \psi^\dagger c (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
 &= \psi^\dagger \hat{H} \psi,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde

$$\hat{H} = c(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \tag{5.18}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H} \psi d^3x. \tag{5.19}$$

Además

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger (-i \partial_i) \psi
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{5.21}$$

5.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (5.22)$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (5.19), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo $\bar{\psi}$ al Lagrangiano en ec. (5.13), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\gamma^i \partial_i \psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\boldsymbol{\nabla})\psi - m\psi &= 0, \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m)\psi, \end{aligned}$$

de donde

$$i\gamma^{02} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)\psi. \quad (5.24)$$

Comparando con ecs. (5.22) y (5.18), tenemos que

$$\begin{aligned} c &= \gamma^0 \\ \gamma^{02} &= 1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

De la ec. (5.18)

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m), \quad (5.26)$$

y de la ec. (5.12)

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (5.27)$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros γ^μ .

La ec. (5.22) puede escribirse como

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0. \quad (5.28)$$

El campo ψ también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que $\partial \hat{H} / \partial t = 0$,

$$\begin{aligned}
 \left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \psi &= 0 \\
 \left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{H} \psi\right) &= 0 \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + i \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}\right) \psi + i \hat{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} - i \hat{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{H}^2 \psi &= 0 \\
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right) \psi &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

De la ec. (5.26), y usando la condición en ec. (5.25), tenemos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^2 &= (\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m)(\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m) \\
 &= (\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} \gamma_0 + m \gamma_0^2 \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m^2
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Sea

$$\begin{aligned}
 \beta &= \gamma^0 \\
 \alpha^i &= \beta \gamma^i \\
 \gamma^i &= \beta \alpha^i
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \beta + m \beta \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m^2 \\
 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m(\boldsymbol{\alpha} \beta + \beta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} + m^2
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Sea A una matriz y θ en un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2} \theta^{i2} + \sum_{i < j} \{A^i, A^j\} \theta^i \theta^j \tag{5.33}$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i < j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i + m^2 \tag{5.34}$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^2 &= 1 \\
 \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad i \neq j \\
 \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2 + m^2 \tag{5.36}$$

y reemplazando en la ec. (5.29) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para ψ

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) \psi &= 0 \\
 (\square + m^2) \psi &= 0
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

En términos de las matrices γ^μ las condiciones en ec. (5.35) son

$$\begin{aligned}\gamma^{02} &= 1 \\ \alpha^{i2} = 1 &\rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^{i2} = 1 \rightarrow \gamma^{i2} = -1 \\ \gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i &= \{\gamma^i, \gamma^0\} = 0\end{aligned}\tag{5.38}$$

De modo que

$$\begin{aligned}\{\alpha^i, \alpha^j\} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 0 & i \neq j \\ -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^i &= 0 & i \neq j \\ \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i &= 0 & i \neq j \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= 0 & i \neq j\end{aligned}\tag{5.39}$$

Las ecuaciones (5.38)(5.39) pueden escribirse como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.\tag{5.40}$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i)\tag{5.41}$$

Además, de la ec. (5.27),

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu.\tag{5.42}$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfagan el álgebra en ec. (5.40) y la condición en ec. (5.42), se conocen como matrices de Dirac. A ψ se le llama espinor de Dirac.

En términos de la matrices γ^μ , el Lagrangiano de Dirac y la ecuación de Dirac, son respectivamente de las ecs. (5.13) y (5.23)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi,\tag{5.43}$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0,\tag{5.44}$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0.\tag{5.45}$$

5.1.5. Propiedades de las matrices de Dirac

De la ec. (5.42)

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^{02} \gamma^i = -\gamma^i \end{cases} \begin{matrix} \mu = 0 \\ \mu = i \end{matrix}.\tag{5.46}$$

Definiendo

$$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3,\tag{5.47}$$

entonces,

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1},\tag{5.48}$$

Teniendo en cuenta que $\gamma_\mu^2 \propto \mathbf{1}$ y conmuta con las demás matrices, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 \gamma_3 &= i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2 = \gamma_3^2 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 = -\gamma_3 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_3 \gamma_5 \\
 \gamma_5 \gamma_2 &= -i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2^2 \gamma_3 = -\gamma_2^2 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_3 = -\gamma_2 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_2 \gamma_5 \\
 \gamma_5 \gamma_1 &= i\gamma_0 \gamma_1^2 \gamma_2 \gamma_3 = \gamma_1^2 i\gamma_0 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_1 i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_1 \gamma_5 \\
 \gamma_5 \gamma_0 &= i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 = -\gamma_0^2 i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -\gamma_0 \gamma_5.
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

De modo que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \tag{5.50}$$

Expandiendo el anticonmutador tenemos

$$\begin{aligned}
 \gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_5 \gamma_\mu \\
 \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5 &= -\gamma_\mu \\
 \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5) &= -\text{Tr} \gamma_\mu \\
 \text{Tr}(\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\mu) &= -\text{Tr} \gamma_\mu \\
 \text{Tr} \gamma_\mu &= -\text{Tr} \gamma_\mu,
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

y por consiguiente

$$\text{Tr} \gamma_\mu = 0. \tag{5.52}$$

Si

$$\tilde{\gamma}_\mu \equiv U \gamma_\mu U^\dagger, \tag{5.53}$$

para alguna matriz unitaria U , entonces $\tilde{\gamma}_\mu$ corresponde a otra representación de álgebra de Dirac en ec. (5.40), ya que

$$\begin{aligned}
 \{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \{U \gamma^\mu U^\dagger, U \gamma^\nu U^\dagger\} \\
 &= U \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} U^\dagger \\
 &= 2g^{\mu\nu} U U^\dagger \\
 &= 2g^{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Claramente, la condición en ec. (5.42) se mantiene para la nueva representación. Como γ_0 es hermítica, siempre es posible escoger una representación tal que $\tilde{\gamma}_0 \equiv U \gamma_0 U^\dagger$ sea diagonal. Como $\gamma_0^2 = 1$, sus entradas en la diagonal deben ser ± 1 , y como $\text{Tr} \tilde{\gamma}_0 = 0$, debe existir igual número de $+1$ que de -1 . Por lo tanto la dimensión de γ_0 (y de γ_μ) debe ser par: $2, 4, \dots$

Si $U = \gamma^0$, entonces $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$ y $\tilde{\gamma}^i = -\gamma^i$.

Para una matriz de n dimensiones existen n^2 matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes. Si se sustrae la identidad quedan $n^2 - 1$ matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes de traza nula. En el caso $n = 2$ corresponden a las 3 matrices de Pauli. En el caso de la ecuación de Dirac se requieren 4 matrices independientes, por lo tanto deben ser matrices 4×4 . En efecto para $n = 4$ existen 15 matrices independientes de traza nula dentro de las cuales podemos acomodar sin problemas las 4 γ^μ . En la Tabla 5.1 se muestran las matrices de traza nula con sus propiedades de transformación bajo el Grupo de Lorentz. En la última se muestra el correspondiente escalar en el espacio de Dirac $\bar{\psi} \Gamma \psi$.

Matriz Γ	Transformación	Número	Escalar en Dirac
1	Escalar (S)	1	$\bar{\psi}\psi$
γ_5	Pseudoescalar (P)	1	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
γ_μ	Vector (V)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$\gamma_\mu\gamma_5$	Vector axial (A)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$	Tensor antisimétrico (T)	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
		16	

Tabla 5.1: Matrices Γ_i .

5.2. Electrodinámica Cuántica

Para hacer el Lagrangiano en ec. (5.43) invariante gauge local bajo $U(1)_Q$, procedemos de la forma usual. El campo transforma como

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{-iQ\theta(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{iQ\theta(x)}.\end{aligned}\tag{5.55}$$

La derivada covariante se define de manera que transforma de la misma forma que el campo, introduciendo el campo gauge A^μ

$$\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - ieQA^\mu\tag{5.56}$$

El Lagrangiano correspondiente a la interacción de un fermión y el campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},\tag{5.57}$$

y es invariante bajo transformaciones locales $U(1)_Q$. Desarrollando la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{5.58}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$, tenemos

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + eQ\gamma^\mu A_\mu\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - i^2 eQ\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \\ [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m]\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi &= 0.\end{aligned}\tag{5.59}$$

Que corresponde a la ecuación de Dirac en presencia del campo electromagnético. Mientras que para el campo A^μ , tenemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[\frac{F^{\rho\eta} F_{\rho\eta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - eQ\bar{\psi}\gamma^\rho\psi \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -eQ\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\end{aligned}\tag{5.60}$$

Definimos entonces la corriente electromagnética generada por el fermión como

$$j^\mu = -eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.\tag{5.61}$$

De nuevo, la aparición de la interacción electromagnética es una consecuencia de la invarianza gauge local.

El cálculo de la corriente para una invarianza de fase global es

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &\propto \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \end{aligned} \quad (5.62)$$

y para la ecuación de Dirac, a diferencia de la ecuación de Schrödinger, la corriente de probabilidad tiene la misma forma que la corriente electromagnética.

5.3. Cromodinámica Cuántica

Los protones, neutrones, piones, kaones y demás hadrones, son partículas compuestas de constituyentes elementales llamados quarks. Por ejemplo los protones, neutrones y piones están constituidos de quarks up y down. Los hadrones están divididos en bariones, B , constituidos de tres quarks, y los mesones, M , de dos. Para satisfacer el principio de exclusión de Pauli, y justificar el confinamiento de los hadrones, se requiere que cada quark contenga N_c cargas diferentes, llamadas cargas de color, de manera que la carga de color de un hadrón sea cero. Muchos resultados experimentales respaldan la existencia de tres cargas de color para cada quark, $N_c = 3$. De este modo cada quark $q = u, d, c, s, t, b$ viene en tres colores

$$q_\alpha = q_1, q_2, q_3 = q_r, q_b, q_g, \quad (5.63)$$

donde los últimos subíndices hacen referencia a los colores red, blue, green. De este modo los Bariones y mesones están descritos por combinaciones singletes de color del tipo $q_r q_b q_g$ y $q_r \bar{q}_r$,

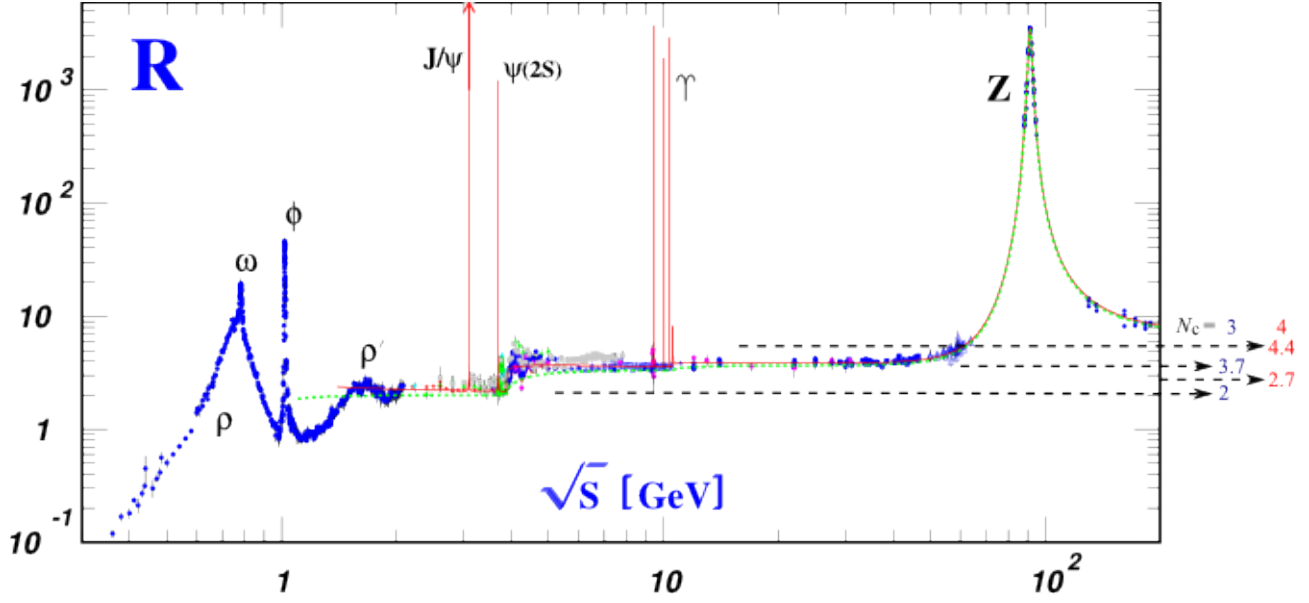
$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |\bar{q}_\alpha q_\beta\rangle \quad (5.64)$$

Estos estados son singletes de color, ver problema 5. 2 Una de las determinaciones de N_c proviene del observable

$$R \approx \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.65)$$

Para $f = u, d, s, c, b, t$, (en orden de masa) tenemos que para una energía donde se pueden producir hadrones compuestos de hasta quarks f_{\max}

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sigma(e^+e^- \rightarrow f_\alpha \bar{f}_\alpha)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \\ R &\approx N_c \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Figura 5.1: Datos para R

De este modo R está dado por la suma de las cargas eléctricas al cuadrado

$$\begin{aligned}
 R &\approx N_c \frac{\sum_f Q_f^2}{Q_\mu^2} \\
 &= N_c \sum_{f=u}^{f_{\max}} Q_f^2 \\
 &= \begin{cases} N_c \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{2}{3} N_c & f = u, d, s, \quad f_{\max} = s \\ N_c \left[2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{10}{9} N_c & f_{\max} = c \\ N_c \left[2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{11}{9} N_c & f_{\max} = b \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2 & N_c = 3, \quad f_{\max} = s \\ \frac{10}{3} & N_c = 3, \quad f_{\max} = c \\ \frac{11}{3} & N_c = 3, \quad f_{\max} = b \end{cases} \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

En la figura, tomada de [5], se muestra el gráfico de R con respecto a \sqrt{s} (la energía de centro de masa de la colisión). Se observan dos escalones, uno que va hasta una energía $\sqrt{s} \approx 4 \text{ GeV}$ que corresponden a $f = u, d, s$, y otro hasta $\sqrt{s} \approx 40 \text{ GeV}$ que corresponde a $f = u, d, s, c, b$. El valor de R es compatible con el esperado de la ec. (5.67). Como referencia también se señalan los valores para $N_c = 4$ (en rojo).

Si queremos que el color sea una carga conservada como la carga eléctrica, o la de isospín débil, esta debe ser la consecuencia de una simetría gauge local. Para tener tres cargas diferentes la posibilidad más simple es imponer la simetría $SU(3)_c$, tal que tengamos un vector compuesto de 3 espinores de Dirac en el espacio de color:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

El Lagrangiano de Dirac con invarianza gauge global $SU(3)$, para un quark, se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{\text{global}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (5.69)$$

donde

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left(i\theta_a\frac{\lambda^a}{2}\right)\Psi. \quad (5.70)$$

$a = 1, \dots, 8$, $\lambda_a/2$ son los ocho generadores de $SU(3)$ y θ_a son los parámetros de la transformación global.

En un análisis similar al de la sección 3.5 tenemos que la Acción invariante gauge local bajo $SU(3)_c$, se obtiene de reemplazar la derivada normal por la derivada covariante (ver ec. (3.195))

$$\mathcal{L}_{\text{local}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{G}^{\mu\nu}\mathbf{G}_{\mu\nu}), \quad (5.71)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right]\Psi \\ \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right]\mathcal{D}_\mu\Psi, \end{aligned} \quad (5.72)$$

con

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s\frac{\lambda_a}{2}G_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig_sG_\mu \quad (5.73)$$

con la definición de esta matriz 3×3 similar a la de la ec. (3.178)

$$(G_\mu)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{\alpha\beta} G_\mu^a \quad (5.74)$$

En términos, la transformación de los campos gauge esta dada por

$$G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = UG^\mu U - \frac{i}{g_s}(\partial^\mu U)U^\dagger. \quad (5.75)$$

Similarmente, definiendo la matriz 3×3 , como se hizo en la ec. (3.188)

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{g_s}[\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \equiv \frac{\lambda_a}{2}G_a^{\mu\nu}, \quad (5.76)$$

donde

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \equiv \tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \quad (5.77)$$

con

$$\tilde{G}_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu \quad (5.78)$$

y f^{abc} son las constantes de estructura fina de $SU(3)$

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}. \quad (5.79)$$

Definiendo el producto vectorial de $SU(3)$ como

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_a = f_{abc} A^b B^c, \quad (5.80)$$

si \mathbf{G}^μ es un vector en el espacio $SU(3)$ con las 8 componentes G_a^μ , podemos escribir la ec. (5.77) como en la sección 3.7

$$\mathbf{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{G}^\nu - \partial^\nu \mathbf{G}^\mu + g_s \mathbf{G}^\mu \times \mathbf{G}^\nu, \quad (5.81)$$

donde $\mathbf{G}^{\mu\nu}$ es el vector en el espacio $SU(3)$ con las 8 componentes $G_a^{\mu\nu}$. Expandiendo el Lagrangiano en ec. (5.71), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ &\quad - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{global}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{SI}}, \quad (5.83)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{global}} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + J_a^\nu G_\nu^a, \end{aligned} \quad (5.84)$$

es la nueva corriente conservada de interacción fuerte que surge como consecuencia de la invarianza gauge local $SU(3)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \\ &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\ &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e, \end{aligned} \quad (5.85)$$

son los términos de autointeracción gauge.

La coorriente de color

$$\begin{aligned} j^\mu &\propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \delta G_\nu^a \\ &\propto i\bar{\Psi}\gamma^\mu i\theta^a(x) \frac{\lambda_a}{2} \Psi - G_a^{\mu\nu} \left(\frac{1}{g_s} \partial_\nu \theta^a + f_{abc} G_\nu^b \theta^c \right) \\ &\propto -\theta^a(x) \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi - \frac{1}{g_s} G_a^{\mu\nu} \partial_\nu \theta^a - G_a^{\mu\nu} f_{dba} G_\nu^b \theta^a \\ &\propto -\theta^a(x) \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi - (\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a \theta^a - \frac{1}{g_s} \partial_\nu (G_a^{\mu\nu} \theta^a) + \frac{1}{g_s} \theta^a \partial_\nu G_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Quitando el término con derivada total

$$\theta^a j_a^\mu \propto -\theta^a(x) \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi + (\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a - \frac{1}{g_s} \partial_\nu G_a^{\mu\nu} \right] \quad (5.87)$$

Eliminando de nuevo el término con derivada total, definimos

$$j_a^\mu = -g_s \left[\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi + (\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a \right] \quad (5.88)$$

Todas las interacciones están determinadas en términos de una única constante de acoplamiento g_s . Las autointeracciones gauge pueden explicar aspectos de la interacción fuerte como la libertad asintótica, que consiste en que las interacciones fuertes se vuelven más débiles a distancias cortas.

En términos de índices de color la corriente, y las otras partes del Lagrangiano, pueden escribirse como

$$J_a^\mu = -g_s \bar{q}^\alpha \gamma^\mu q^\beta \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (5.89)$$

Note que tanto para la Electrodinámica Cuántica como para la Cromodinámica Cuántica la corriente $\bar{\psi} \Gamma \psi$ es vectorial. Para las interacciones débiles la estructura es más complicada y requiere un conocimiento más profundo de la ecuación de Dirac y sus soluciones.

5.3.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange

Siguiendo los mismos procedimientos anteriores debemos llegar a los siguientes resultados. Para el campo Ψ

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi = 0, \quad (5.90)$$

mientras que para los campos $\mathbf{G}^{\mu\nu}$

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\nu, \quad (5.91)$$

donde el vector en espacio $SU(3)$ \mathbf{J}^ν tiene las 8 componentes J_a^ν dadas en la ec. (5.88). Como $\mathbf{G}^{\mu\nu}$ es una matrix 8×8 , la derivada covariante debe estar en la representación adjunta como en la ec. (3.249). La ecuación (3.267) aplicada a $SU(3)$ es por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} + g_s \mathbf{G}_\mu \times \mathbf{G}^{\mu\nu} \\ \mathcal{D}_\mu G_a^{\mu\nu} &= \partial_\mu G_a^{\mu\nu} + g_s f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} = -g_s \left[f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \quad (5.93)$$

donde

$$\begin{aligned} j_a^\nu &= -g_s \left[f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \\ &= -g_s \left[-(\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

Como $\mathbf{G}^{\mu\nu} = -\mathbf{G}^{\nu\mu}$ se sigue que

$$\partial_\nu j_a^\nu = 0 \quad (5.95)$$

y tenemos las ocho corrientes conservadas.

5.4. Soluciones a la ecuación de Dirac

5.4.1. Lagrangiano de Weyl

En la ec. (5.17), obtuvimos el Hamiltoniano en ec. (5.26)

$$\hat{H} = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (5.96)$$

Una escogencia particular de las cuatro matrices γ^μ , conocida como la representación de Weyl, o representación quirial, puede escribirse en términos de la matrices de Pauli. Escritas en bloques 2×2 , tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.97)$$

Con $\sigma^0 = 1$. Con la matriz de transformación

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

podemos obtener la representación de Dirac, tal que U diagonaliza γ^0 ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

En adelante trabajaremos en la representación de Weyl que en forma compacta es

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (5.101)$$

Hemos escrito las matrices de Dirac en bloques 2×2 , y es natural escribir similarmente las cuatro componentes del campo de Dirac como un par de campos de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

Donde $\psi_{L,R}$ son espinores de Weyl de dos componentes. En la representación de Weyl el Lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= i\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu\psi - m\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_L \\ \partial_\mu\psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L) \end{aligned} \quad (5.103)$$

5.4.2. Ecuaciones de Weyl

Las ecuaciones de Euler-Lagrangiano para el Lagrangiano en ec.(5.103), dan como resultado

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.104)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\sigma^0 \partial_0 \psi_L - i\sigma^i \partial_i \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^0 \partial_0 \psi_R + i\sigma^i \partial_i \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.105)$$

que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.106)$$

Para el Lagrangiano invariante gauge local $U(1)$ en ec.(5.57), tendríamos

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.107)$$

Expandiendo, para \mathcal{D}^μ dado en la ec.(5.56), con $q = -e$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (5.108)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} i(\partial_0 + iqA_0)\psi_L - i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i(\partial_0 + iqA_0)\psi_R + i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.109)$$

de donde

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)\psi_L - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0)\psi_R + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.110)$$

5.5. Espín

El momento angular está descrito por el álgebra

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (5.111)$$

Si dos operadores no conmutan no es posible conocer sus autovalores simultáneamente. Sin embargo

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0 \quad (5.112)$$

y por convención podemos escoger $\langle \hat{L}_z \rangle$ y \hat{L}^2 como los dos observables de momento angular.

Las matrices de Pauli forman una representación del álgebra de momento angular

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (5.113)$$

donde el *operador de espín* se define como

$$\hat{S}_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (5.114)$$

Los autovalores del operador de espín son entonces

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

que corresponde a autovalores $\lambda = \pm 1/2$ con autovectores

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

que son autoestados de espín up y espín down respectivamente. Una función de onda de espín ha de poder expandir en términos de estos autoestados

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle \quad (5.117)$$

donde $|c_1|^2$ y $|c_2|^2$ corresponden a las probabilidades de encontrar el estado con espín up o espín down respectivamente. Además

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (5.118)$$

y ψ es un espinor. La ecuación de Scrödinger para un espinor es, por ejemplo

$$i\frac{\partial\psi_R}{\partial t} = \hat{H}\psi_R \quad (5.119)$$

donde

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

con ψ_i las funciones de onda convencionales. Dicha ecuación debe ser invariante bajo rotaciones en el espacio de espín

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp(i\frac{\sigma^i}{2}\theta_i)\psi_R. \quad (5.121)$$

Esta es justo las ecuaciones que aparecen cuando se hace $m = 0$ en la ec.(5.106). Para ψ_R

$$\hat{H} = i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \quad (5.122)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R + i\psi_R^\dagger \sigma^i \partial_i \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R - i\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_R \end{aligned} \quad (5.123)$$

Como el Lagrangiano debe ser escalar entonces $\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R$ debe ser un vector en el espacio de espín. En efecto, escogiendo los coeficientes como

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ c_2 &= e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (5.124)$$

entonces

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = c_1 c_1^* + c_2 c_2^* = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1. \quad (5.125)$$

Para

$$\begin{aligned} \psi_R &= e^{-ip \cdot x} (c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle) = e^{-ip \cdot x} \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} |+\rangle \end{aligned} \quad (5.126)$$

donde

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.127)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma_1 \psi_R &= (c_1^\dagger \ c_2^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= (c_2^\dagger \ c_1^\dagger) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= c_2^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_2 \\ &= \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{-i\phi} + \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{i\phi} \\ &= (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &= (2 \cos \phi) \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= \cos \phi \sin \theta \end{aligned} \quad (5.128)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma_2 \psi_R &= \sin \phi \sin \theta \\ \psi_R^\dagger \sigma_3 \psi_R &= \cos \theta \end{aligned} \quad (5.129)$$

Por consiguiente $\psi^\dagger \sigma_i \psi$ son las componentes de un vector unitario $\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi$ con ángulo polar θ y ángulo azimutal ϕ . Posibles escalares se pueden construir con otros vectores disponibles, por ejemplo \mathbf{p} , como en la ec. (5.123).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \sigma^i \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \\ &= \sigma^1 \cos \phi \sin \theta + \sigma^2 \sin \phi \sin \theta + \sigma^3 \cos \theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}|+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\theta/2) + \sin \theta \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} [\sin \theta \cos(\theta/2) - \cos \theta \sin(\theta/2)] \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= +|+\rangle
\end{aligned} \tag{5.131}$$

(El gorro en este caso, significa vector unitario). Decimos entonces que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_R = +e^{-ip \cdot x}|+\rangle = +\psi_R \tag{5.132}$$

es un estado de helicidad positiva o derecha. Como $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$ denota la proyección de espín sobre la dirección de movimiento, para la helicidad derecha, dicha proyección es positiva.

Si definimos ademas

$$\psi_L = e^{-ip \cdot x}|-\rangle \tag{5.133}$$

donde

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{5.134}$$

entonces

$$\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi = -(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \tag{5.135}$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_L = -e^{-ip \cdot x}|-\rangle = -\psi_L \tag{5.136}$$

ψ es un estado de helicidad negativa o izquierda. Además

$$\langle -|-\rangle = \langle +|+\rangle = 1 \quad \langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0 \tag{5.137}$$

donde $\langle -| = |-\rangle^\dagger$, etc.

5.6. Solución de partícula libre

Consideraremos inicialmente dos casos $m^2 \gg \mathbf{p}^2$ y $m^2 \ll \mathbf{p}^2$.

De la ecuación relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{5.138}$$

tenemos que para el caso no relativista $m^2 \gg \mathbf{p}^2$, podemos tomar $\mathbf{p} = 0$, de modo que

$$E^2 = m^2 \Rightarrow E = \pm m \tag{5.139}$$

La aparición de soluciones de Energía negativa. . .

A $\mathbf{p} = 0$ proponemos las soluciones de energía positiva $E = +m$

$$\psi_L = u_L e^{-iEt} = \psi_L = u_L e^{-imt} \quad \psi_R = u_R e^{-iEt} = u_R e^{-imt} \quad (5.140)$$

En este caso las ecs. (5.106) se reducen a

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.141)$$

de modo que para que (5.140) sea solución, se debe satisfacer que

$$u_L = u_R = u \quad (5.142)$$

con

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = |+\rangle. \quad (5.143)$$

El espinor completo es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.144)$$

Con norma

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = |+\rangle^\dagger |+\rangle + |+\rangle^\dagger |+\rangle = 1 \quad (5.145)$$

Para el caso relativista $m^2 \ll \mathbf{p}^2$, podemos hacer $m = 0$ y las ecuaciones (5.106) se desacoplan

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_L &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.146)$$

Proponemos como soluciones de energía positiva

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} = \psi_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad (5.147)$$

reemplazando en las ecs. (5.146) tenemos

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= 0 \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.148)$$

De modo que para que las ecs. (5.147) sean solución se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (5.149)$$

pero de la ec. (5.138), tenemos que para $m = 0$, $E = |\mathbf{p}|$, y $\mathbf{p}/E = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \hat{\mathbf{p}}$. Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (5.150)$$

Comparando con las ecuaciones (5.132) y (5.136) vemos que para las soluciones de energía positiva $\psi_{R,L}$ corresponden en efecto a estado de helicidad derecha e izquierda respectivamente. Explicitamente

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L = e^{-ip \cdot x} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} |-\rangle = -e^{-ip \cdot x} |-\rangle = -\psi_L \quad (5.151)$$

El espinor de cuatro componentes para la solución de energía positiva es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \psi &= \bar{u} u = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= (|-\rangle^\dagger \quad |+\rangle^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= (\langle -| \quad \langle +|) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= (\langle +| \quad \langle -|) \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.153)$$

Es convención escoger la normalización del espinor de Dirac tal que

$$\bar{u} u = 2m \quad (5.154)$$

que de hecho es cero cuando $m = 0$.

Para las soluciones de energía negativa tenemos

$$\hat{\psi}_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad \hat{\psi}_R = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad (5.155)$$

Para explorar las características de esta solución podemos reemplazar en la ec. (5.148) $E \rightarrow -E$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$, de modo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_L &= +\hat{\psi}_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \hat{\psi}_R &= -\hat{\psi}_R \end{aligned} \quad (5.156)$$

De modo que la antipartícula de una partícula de helicidad izquierda tiene helicidad derecha. Dentro de los errores experimentales actuales se puede afirmar que en la naturaleza solo se ha observado el neutrino izquierdo y su correspondiente antineutrino derecho.

Para $m \neq 0$, tenemos de la ecs. (5.106) y (5.147) (ver ec. (5.148))

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_L &= m\psi_R \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (5.157)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_L &= \psi_R \\ \left(\frac{E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_R &= \psi_L. \end{aligned} \quad (5.158)$$

En este caso sin embargo, la helicidad no está bien definida y sólo podemos afirmar que ψ_L corresponde a la solución que tiene mayor probabilidad de ser izquierda que derecha. Para calcular dicha probabilidad es necesario especificar los espinores $u_{L,R}$ (ver [2], Capítulo 6). El resultado es que la probabilidad de que ψ_R sea derecho se obtiene de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) |\psi_R\rangle \rightarrow \begin{cases} +|\psi_R\rangle & v \rightarrow c \quad (\text{relativistic}) \\ +\frac{1}{2}|\psi_R\rangle & v \rightarrow 0 \quad (\text{non-relativistic}) \end{cases} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) |\psi_R\rangle\end{aligned}\quad (5.159)$$

mientras que la probabilidad de que sea izquierdo se obtiene de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) |\psi_R\rangle \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} |\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) |\psi_R\rangle\end{aligned}\quad (5.160)$$

Si en un decaimiento β solo se emiten electrones izquierdos, el grado de polarización del electrón emitido es, usando la ec. (5.160)

$$\langle \psi_R | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi_R \rangle + \langle \psi_L | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} | \psi_L \rangle = +\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) = -\frac{v}{c} \quad (5.161)$$

El gráfico de polarización versus $-v/c$, [2] (§9.1), debe corresponder a una línea recta de pendiente 45° . Si sólo se emiten electrones derechos sería

$$+\frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{v}{c} \quad (5.162)$$

Mientras que si se emiten por igual electrones derechos e izquierdos la polarización total sería cero.

Las soluciones en ec. (6.6) pueden ser intercambiadas por $\psi_L \rightarrow -\psi_R$. Esto se puede ver como una transformación de paridad definida por

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \qquad t \rightarrow t \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R. \quad (5.163)$$

De aquí el nombre de la transformación. Como $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ y $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, entonces

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}, \quad (5.164)$$

Entonces es de esperarse que el momentum angular intrínseco, transforme como el momentum angular, y

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.165)$$

Bajo la transformación de paridad

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R, \quad (5.166)$$

Las ecuaciones (6.6) quedan invariantes. Además bajo dicha transformación

$$\sigma^\mu \partial_\mu = \sigma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \rightarrow \sigma^0 \partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \quad (5.167)$$

de modo que el Lagrangiano correspondiente, dado en la ec. (5.103) también es invariante bajo la transformación de paridad

$$\sigma^\mu \partial_\mu \rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R \quad (5.168)$$

5.7. Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético

En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético (electrodinámica cuántica en la sección 5.2) debe contener la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético. Combinando las ecuaciones (5.110) tenemos

$$\begin{aligned}(i\partial_0 - qA_0)(\psi_L + \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L - \psi_R) - m(\psi_L + \psi_R) &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0)(\psi_L - \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L + \psi_R) + m(\psi_L - \psi_R) &= 0\end{aligned}\quad (5.169)$$

Esta forma es útil porque de la solución de partículas libre esperamos que $\psi_L - \psi_R$ sea pequeña. Como antes proponemos como solución

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} \quad (5.170)$$

Para solucionar este sistema de ecuaciones acopladas definimos

$$\begin{aligned}\phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) \Rightarrow (\psi_L + \psi_R) = e^{-imt}\phi \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) \Rightarrow (\psi_L - \psi_R) = e^{-imt}\chi\end{aligned}\quad (5.171)$$

donde

$$\begin{aligned}\phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) = e^{imt}e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}(u_L + u_R) = e^{i(m-E)t}e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}(u_L + u_R) \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) = e^{imt}e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}(u_L - u_R) = e^{i(m-E)t}e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}(u_L - u_R)\end{aligned}\quad (5.172)$$

Reemplazando (5.171) en eq. (5.169)

$$\begin{aligned}e^{-imt}[m\phi + (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi - m\phi] &= 0 \\ e^{-imt}[m\chi + (i\partial_0 - qA_0)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi + m\chi] &= 0\end{aligned}\quad (5.173)$$

de donde

$$\begin{aligned}(i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi &= 0\end{aligned}\quad (5.174)$$

Para una solución $\chi \propto e^{i(-Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$, dentro de un sistema atómico, tenemos

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi = (E - qV + 2m)\chi \quad (5.175)$$

Para los potenciales de coulomb atómicos $qV = qA_0 \sim 10\text{eV}$, y como $m \approx 0.5\text{MeV}$ para el electrón, entonces

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi \rightarrow (i\partial_0 + 2m)\chi \quad (5.176)$$

de la ec. (5.172) tenemos

$$(i\partial_0 + 2m)\chi = [(E - m) + 2m]\chi \quad (5.177)$$

En el límite no relativista de $|\mathbf{p}| \approx 0$ (estamos en la solución de energía positiva), de la ec. (5.138) $E \approx +m$ y $E - m \approx 0$, entonces

$$(i\partial_0 + 2m)\chi \approx 2m\chi \quad (5.178)$$

Reemplazando en ec. (5.174)

$$\chi = \frac{1}{2m} \sigma^i (i\partial_i - qA_i) \phi \quad (5.179)$$

entonces

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \hat{H} \phi \quad (5.180)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{H} \phi &= qA_0 \phi + \sigma^i (i\partial_i - qA_i) \frac{1}{2m} \sigma^j (i\partial_j - qA_j) \phi \\ &= \frac{1}{2m} \sigma^i (i\partial_i - qA_i) \sigma^j (i\partial_j - qA_j) \phi + qA_0 \phi \\ &= \frac{1}{2m} \sigma^i \sigma^j (-\partial_i \partial_j - iq(\partial_i A_j) - iqA_j \partial_i - iqA_i \partial_j + q^2 A_i A_j) \phi + qA_0 \phi \\ &= \frac{1}{2m} [(-\sigma^i \sigma^j \partial_i \partial_j + q^2 \sigma^i \sigma^j A_i A_j) \phi - iq\sigma^i \sigma^j (\partial_i A_j) \phi - iq\sigma^i \sigma^j A_j \partial_i \phi - iq\sigma^i \sigma^j A_i \partial_j \phi] + qA_0 \phi \end{aligned}$$

Usando las propiedades de las matrices de Pauli en ecs.(3.173) y la ec.(5.33), que para $A^i = \sigma^i$ es

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i \theta_i^2 \quad (5.181)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H} \phi &= \frac{1}{2m} \{ [-(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 + q^2 (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2] \phi - iq\{\sigma^i, \sigma^j\} A_j \partial_i \phi - iq\sigma^i \sigma^j (\partial_i A_j) \phi \} + qA_0 \phi \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2 A_i^2] \phi - 2iq\delta_{ij} A_j \partial_i \phi - iq(i\epsilon_{ijk} \sigma^k + \delta_{ij})(\partial_i A_j) \phi \right\} + qA_0 \phi \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2 A_i^2] \phi - 2iqA_i \partial_i \phi - iq(\partial_i A_i) \phi - q\sigma^k (\epsilon_{ijk} \partial_i A^j) \phi \right\} + qA_0 \phi \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2 \phi &= (i\partial_i - qA_i)(i\partial_i - qA_i) \phi \\ &= (-\partial_i \partial_i + q^2 A_i A_i) \phi - iq(\partial_i A_i) \phi - iqA_i \partial_i \phi - iqA_i \partial_i \phi \\ &= \sum_i (-\partial_i^2 + q^2 A_i^2) \phi - 2iqA_i \partial_i \phi - iq(\partial_i A_i) \phi \end{aligned} \quad (5.182)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{H} \phi &= \frac{1}{2m} \{ (i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2 \phi - q\sigma^k (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_k \phi \} + qA_0 \phi \\ &= \left[\frac{1}{2m} (i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left(\frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \phi \end{aligned} \quad (5.183)$$

En ausencia del campo electromagnético recuperemos la Ecuación de Schrödinger para una partícula libre como era de esperarse. Sin el último término $(q\boldsymbol{\sigma}/2m) \cdot \mathbf{B}$, sería el Hamiltoniano de Schrödinger para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. El término adicional es interpretado como la energía en un campo magnético, de un momento magnético intrínseco asociado con una partícula de Dirac. Definimos entonces el momento magnético intrínseco como ($q = -e$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_e &= -\frac{e\boldsymbol{\sigma}}{2m} \\ &= -2\left(\frac{e}{2m}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &= -2\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &= -g_e\left(\frac{e\hbar}{2m}\right)\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\end{aligned}\tag{5.184}$$

donde hemos recuperado el factor \hbar y definido el *factor-g* [26], $g_e = 2$. Se define el momento magnético anómalo del electrón como

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2}\tag{5.185}$$

de modo que $a_e = 0$. Sin embargo experimentalmente $a_e \sim 10^{-3}$

$$a_e = 0.001\,159\,652\,1859(38)\tag{5.186}$$

Después de la segunda cuantización, se pueden realizar correcciones perturbativas al valor calculado anteriormente de g_e . Dicho cálculo ha sido realizado a cuarto orden en teoría de perturbaciones coincidiendo con el valor experimental hasta la décima cifra significativa. Este tipo de comprobaciones entre teoría y experimento ha llevado a considerar la Electrodinámica Cuántica (QCD) como la mejor teoría que se halla construido para describir la naturaleza.

5.8. Fermiones quirales de cuatro componentes

Los fermiones izquierdos y derechos pueden ser escritos en terminos de espinores de Dirac como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R\tag{5.187}$$

En la representación de Weyl

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{5.188}$$

Podemos definir

$$\begin{aligned}P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.189}$$

De modo que

$$\begin{aligned} P_L \psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L \\ P_R \psi &= \tilde{\psi}_R. \end{aligned} \quad (5.190)$$

En adelante omitiremos las tildes sobre los espinores de Dirac $\tilde{\psi}_{L,R}$.

Las matrices $P_{L,R}$ tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (5.191)$$

Usando la ec. (5.50)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (5.192)$$

Para escribir el Lagrangiano en término de los nuevos $\psi_{L,R}$ debemos tener en cuenta que

$$\overline{\psi_{L,R}} = (P_{L,R} \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} = \overline{\psi} P_{R,L} \quad (5.193)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} \psi \\ &= i \overline{\psi} (P_L + P_R) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} (P_L + P_R) \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L \psi - m \overline{\psi} P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L P_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi + i \overline{\psi} P_R P_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi} P_L \gamma^\mu \partial_\mu P_R \psi + i \overline{\psi} P_R \gamma^\mu \partial_\mu P_L \psi - m \overline{\psi} P_L P_L \psi - m \overline{\psi} P_R P_R \psi \\ &= i \overline{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m (\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R). \end{aligned} \quad (5.194)$$

En términos de espinores de izquierdos y derechos de cuatro componentes la transformación de paridad

$$t \rightarrow t \quad \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \quad \psi_L \rightarrow \psi_R, \quad \psi_R \rightarrow \psi_L. \quad (5.195)$$

da lugar a

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i \overline{\psi}_R \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_R + i \overline{\psi}_L \tilde{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m (\overline{\psi}_R \psi_L + \overline{\psi}_L \psi_R), \quad (5.196)$$

donde $\tilde{\gamma}^\mu = U \gamma^\mu U^\dagger$, con $U = \gamma^0$. Como las dos representaciones dan lugar a la misma física, podemos decir que el Lagrangiano en términos de espinores L, R de cuatro componentes es invariante bajo la transformación de paridad.

La existencia de ambos espinores $\psi_{L,R}$ garantizan que el Lagrangiano de Dirac es invariante bajo la transformación de paridad.

La corriente de la electrodinámica cuántica en ec. (5.61) (o la de la cromodinámica cuántica, ec. (5.89)) conservan paridad ya que, siguiendo los mismos pasos que en la ec. (6.15)

$$\overline{\psi} \gamma^\mu \psi = \overline{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \overline{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R. \quad (5.197)$$

Si para alguna partícula, como es el caso del neutrino, no existe la componente derecha, entonces la correspondiente interacción vectorial viola paridad y no puede tener interacciones electromagnéticas ni fuertes, es decir, no se acopla con el fotón o los gluones. Además dicha partícula no puede tener masa de Dirac. En el caso del neutrino esto se entiende pues al no tener carga eléctrica sólo requiere dos grados de libertad independientes.

De otro lado, si una determinada interacción, como es el caso de la interacción débil, solo participa la componente izquierda de la ec. (5.197), está correspondiente a una interacción del tipo

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi,\end{aligned}\tag{5.198}$$

que de acuerdo a la asignación en la Tabla corresponde a una corriente V-A.

5.9. Problemas

1. Calcule la dimensión del campo ψ
2. Demuestre que para una transformación $SU(3)_c$ global, los estados B y M en la ec.(5.64) son invariantes. Es decir, son singletes de color (ver [2] §16.2)
3. Lagrangiano de Weyl.

a) Demuestre que $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L = -\psi_L \sigma^\mu \psi_L^\dagger$

b) Definiendo $\xi = \psi_L$ y $\chi^\dagger = \psi_R$, demuestre que hasta derivadas totales

$$\mathcal{L} = i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m(\xi\chi + \xi^\dagger \chi^\dagger)\tag{5.199}$$

De modo que el Lagrangiano para un fermión de Weyl, ψ_W , no masivo puede escribirse como

$$\mathcal{L} = i\psi_W^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_W\tag{5.200}$$