

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría Clásica de Campos</b>	<b>7</b>
1.1. Principio de Mínima Acción	7
1.2. La cuerda clásica unidimensional	8
1.3. Principio de Mínima Acción para $\mathcal{L}$	13
1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange	13
1.3.2. Teorema de Noether para simetrías internas	15
1.3.3. Teorema de Noether para simetrías externas	16
1.4. Aplicación a Mecánica Cuántica	18
1.5. Aplicación a la cuerda unidimensional	21
1.6. Problemas	27
<b>2. Campos vectoriales</b>	<b>29</b>
2.1. Unidades Naturales	29
2.2. Notación relativista	33
2.2.1. Ejemplos de cuadvectores	35
2.2.2. Ecuaciones covariantes	39
2.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante	40
2.3.1. Lagrangiano Electromagnético	43
2.3.2. Energía del campo electromagnético	47
2.3.3. Fijación del gauge	49
2.4. Ecuaciones de Proca	50
2.5. Problemas	52
<b>3. Principio Gauge Local</b>	<b>53</b>
3.1. Ecuación de klein-Gordon	53
3.2. Campos escalares complejos	59
3.3. Invarianza gauge local abeliana	65
3.3.1. Aplicación a barrera de potencial	69
3.4. Aplicación a la mecánica cuántica	73
3.5. Invarianza gauge local no abeliana	76
3.6. Invarianza gauge local para un grupo semisimple	83
3.7. $\Phi$ como un triplete de $SU(2)$	88
3.8. Problemas	93

<b>4. Ruptura espontánea de simetría</b>	<b>97</b>
4.1. Masa para el campo escalar . . . . .	97
4.2. Bosón de Goldstone . . . . .	99
4.2.1. Coordenadas cartesianas . . . . .	99
4.2.2. Coordenadas polares . . . . .	101
4.3. Masa para el bosón gauge . . . . .	101
4.4. Mecanismo de Higgs en un caso no Abelianos . . . . .	103
<b>5. Fermiones</b>	<b>109</b>
5.1. Ecuación de Dirac . . . . .	109
5.1.1. Fermiones de Weyl . . . . .	109
5.1.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac . . . . .	110
5.1.3. Tensor momento-energía . . . . .	111
5.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	112
5.1.5. Propiedades de las matrices de Dirac . . . . .	114
5.2. Electrodinámica Cuántica . . . . .	116
5.3. Cromodinámica Cuántica . . . . .	117
5.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange . . . . .	121
5.4. Soluciones a la ecuación de Dirac . . . . .	122
5.4.1. Lagrangiano de Weyl . . . . .	122
5.4.2. Ecuaciones de Weyl . . . . .	123
5.5. Espín . . . . .	123
5.6. Solución de partícula libre . . . . .	126
5.7. Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético . . . . .	130
5.8. Fermiones quirales de cuatro componentes . . . . .	132
5.9. Problemas . . . . .	134
<b>6. Modelo Estándar</b>	<b>135</b>
6.1. Interacción Electrodébil para leptones . . . . .	135
6.1.1. Dispersión electron-neutrino . . . . .	142
6.2. Modelo Estándar . . . . .	143
6.2.1. Primera generación . . . . .	143
6.2.2. Dinámica de sabor . . . . .	145
6.3. Fenomenología Electrodébil . . . . .	148
6.3.1. Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas . . . . .	151
6.4. Cálculo de procesos . . . . .	153
6.5. Problemas . . . . .	153
<b>A. Soluciones a los problemas</b>	<b>155</b>

# Introducción

Nuestro entendimiento de cómo funciona el mundo físico ha llegado a una culminación exitosa en años recientes con el desarrollo y comprobación experimental del Modelo Estándar (ME) de las interacciones fundamentales. A medida que el ME ha llegado a ser mejor entendido y comprobado experimentalmente, mucha más gente con algunos conocimientos en física desea entender cuantitativamente éste nuevo éxito de las ciencias moderna. Debido a esto, parece esencial tener una presentación del ME que pueda ser usada a nivel pregrado. En el presente trabajo pretendemos desarrollar un núcleo básico de temas que permitan construir el sector bosónico del Modelo Estándar y mostrar que dentro de este marco se pueden ilustrar los aspectos más importantes del ME. Este material de apoyo está dirigido a personas que con conocimientos de mecánica y electromagnetismo a nivel de pregrado quieran obtener un conocimiento básico de los principios subyacentes y las principales predicciones del Modelo Estándar de las partículas elementales que permita apreciar una de las fronteras más importantes de la ciencia moderna.

El Modelo Estándar da una descripción amplia de las partículas básicas y las fuerzas de la naturaleza y de como pueden ser descritos todos los fenómenos físicos que vemos. Este contiene los principios subyacentes de todo el comportamiento de protones, núcleos, átomos, moléculas, materia condensada, estrellas, y más. El Modelo Estándar ha explicado mucho de lo que no fue entendido antes; ha hecho cientos de predicciones exitosas, incluyendo muchas que han sido dramáticas; y a excepción de los resultados sobre oscilaciones de neutrinos, no hay ningún fenómeno en su dominio que no haya sido explicado.

La madurez de la formulación del Modelo Estándar hace que cada vez sea más necesario que cualquier persona formada en física deba tener un conocimiento básico de sus principios subyacentes y sus principales predicciones. Sin embargo, una apreciación completa del éxito y el significado del Modelo Estándar requiere de un conocimiento profundo de la Teoría Cuántica de Campos que va más allá de lo que es enseñado usualmente en los cursos de pregrado en física. La Teoría Cuántica de Campos combina de forma coherente la mecánica cuántica y la relatividad especial. No fue sino hasta que la Teoría Cuántica de Campos quedó completamente formulada a principio de los años setenta (con la prueba de que las Teorías Gauge no abelianas con ruptura espontánea de simetría eran renormalizables), que el Modelo Estándar consiguió emerger como la teoría que explica el comportamiento conocido de las partículas elementales y sus interacciones.

A medida que el Modelo Estándar ha llegado a ser mejor entendido y comprobado experimentalmente, mucha más gente con algunos conocimientos en física pero que no esta interesada en trabajar en física de partículas, desea entender cuantitativamente éste nuevo éxito de las ciencias moderna. Debido a esto, parece esencial tener una presentación del Modelo Estándar que pueda ser usada a nivel pregrado. Además, parece aún más importante tener libros que cualquier estudiante o físico que tenga los conocimientos necesarios pueda leer para aprender sobre los desarrollos en física de partículas. Aquellos desarrollos deberían ser parte de la educación de cualquiera interesado en lo que la humanidad ha aprendido acerca de los constituyentes básicos de la materia y las fuerzas de la

naturaleza.

Pero hasta hace poco tiempo no había un sitio donde las personas con los conocimientos suficientes pudieran ir a aprender esos desarrollos. Para llenar este vacío aparecieron libros como el de Kane [1] (1993) y Cottingham [2] (1998) donde los prerrequisitos mínimos son un curso introductorio en mecánica cuántica (Física Moderna) y los cursos normales de pregrado en mecánica y electromagnetismo. Con éstas herramientas es posible obtener un buen entendimiento a nivel cuantitativo de la física de partículas moderna. En estos libros se ha hecho un esfuerzo por extraer los conceptos y técnicas básicas usadas en el Modelo Estándar de modo que un mayor número de físicos no especializados en el área puedan tener una visión del logro intelectual representado por el Modelo, y compartir el excitamiento por su éxito. En estos libros el Modelo Estándar es enseñado escribiendo la forma básica de la teoría y extrayendo sus consecuencias.

Todos los tratamientos anteriores eran a nivel de posgrado para físicos que querían especializarse en el área, o descripciones populares demasiado superficiales para realmente entender los desarrollos, o descripciones históricas carentes de la lógica profunda del Modelo Estándar.

Con nuestra experiencia dictando los cursos de introducción a la física de partículas en la carrera de Física basados en estos textos, ha quedado claro que con una presentación del Modelo Estándar de una forma deductiva en lugar de la aproximación histórica usual de los libros más avanzados, los estudiantes pueden llegar a entender la estructura básica de la física de partículas moderna. Además resulta ser una pequeña extensión adicionar el marco apropiado para entender porque algunas direcciones de la investigación de frontera se enfatizan más, y en que direcciones se espera que aparezcan nuevos progresos.

Con el presente trabajo queremos ir más allá del objetivo de los anteriores libros y mostrar que con una reorganización e inclusión de tópicos adicionales no enfatizado en esos libros, con sólo los conocimientos de los cursos normales de pregrado en mecánica y electromagnetismo, se puede llegar más rápidamente a un entendimiento cuantitativo de los aspectos más importantes del Modelo Estándar.

En el presente trabajo pretendemos desarrollar un núcleo básico de temas que permitan construir el sector bosónico del Modelo Estándar y mostrar que dentro de este marco se pueden ilustrar los aspectos más importantes del Modelo Estándar.

La Teoría Cuántica de Campos (TCC) es el marco teórico utilizado en la descripción cuántica de campos relativistas. En esta teoría se estudian sistemas en los cuales las partículas pueden ser creadas y destruidas. Esta teoría resulta de combinar la mecánica cuántica con la relatividad especial en un marco consistente. Las teorías cuánticas de campos se describen más convenientemente en el formalismo Lagrangiano. De hecho, los Lagrangianos que describen las partículas elementales y sus interacciones puede ser construidos a partir de principios de simetría. Aspectos básicos de la construcción de la TCC son:

- Lagrangianos para campos de una sola partícula
- Tratamiento relativístico de un campo
- Segunda cuantización de campos de una sola partícula, bien sea mediante la cuantización canónica o a través de integrales de camino
- Tratamiento de una sola partícula de forma covariante que permita describir la creación y aniquilación de partículas.
- Invarianza gauge local

Ejemplos concretos de teorías cuánticas de campos son:

- **Electrodinámica Cuántica.** Resulta de imponer el principio gauge local basado en una simetría abeliana a la ecuación de Dirac para el electrón. Como resultado se obtienen las ecuaciones de Maxwell con un término de corriente asociada a la interacción electromagnética entre el electrón y el fotón.
- **Cromodinámica Cuántica.** Resulta de imponer el principio gauge local basado en una simetría no abeliana a la ecuación de Dirac para los quarks. Entre los resultados se explica la libertad asintótica observada en las interacciones fuertes y la autointeracción de los bosones gauge.
- **Teoría Electrodébil.** Resulta de imponer el principio gauge local simultáneamente para una simetría abeliana y para una simetría no abeliana a la ecuación de Dirac para los fermiones conocidos. La simetría no abeliana en este caso prohíbe términos de masa para los fermiones, mientras que la invarianza gauge local, como en los casos anteriores, prohíbe los términos de masa para los bosones gauge. De este modo, cuando las simetrías de la teoría electrodébil son exactas, todas las partículas aparecen sin masa. Para ser consistente con el espectro de fermiones y bosones conocidos, se introducen 4 campos escalares sin masa organizado en lo que se conoce como un doblete de Higgs. Uno de ellos desarrolla un valor esperado de vacío y rompe espontáneamente la simetría, generando masa para todos los fermiones. Mediante el mismo mecanismo los otros 3 campos escalares ayudan a explicar las masas para tres de los bosones gauge del modelo. El fotón, junto con los neutrinos permanecen sin masa.

El Modelo Estándar es la TCC que combina de forma consistente la Cromodinámica Cuántica y la Teoría Electrodébil. Después del rompimiento espontáneo de la simetría la parte Electrodébil se reduce a la Electrodinámica Cuántica. El estudio de los fundamentos y las consecuencias fenomenológicas del Modelo Estándar requiere del desarrollo completo de la TCC basado en conceptos y técnicas avanzadas de mecánica cuántica y relatividad especial a un nivel normalmente de posgrado.

En las TCC los campos electromagnéticos se convierten en operadores que dependen del espacio y el tiempo. Los valores esperados de estos operadores en el ambiente descrito por los estados cuánticos dan lugar a los campos clásicos. Los otros campos bosónicos, y los campos de Dirac para los fermiones del Modelo Estándar también se convierten en operadores.

Sin embargo se puede escribir la forma básica del Modelo Estándar y extraer muchas de sus consecuencias tratando los campos bosónicos y de Dirac como simples funciones.

En éste caso los campos se pueden pensar como funciones de ondas de una partícula. En este contexto el Lagrangiano bosónico del Modelo Estándar puede construirse usando solo conocimientos a nivel de pregrado de mecánica y electromagnetismo y algunas referencias a aspectos básicos de la mecánica cuántica.

Con estas herramientas se pueden escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante y mostrar como éstas se pueden obtener, usando el principio de mínima acción, a partir del Lagrangiano para el vector de campo electromagnético. Se puede introducir a este nivel la importante idea de las transformaciones gauge y relacionarla con la conservación de la carga eléctrica. Se puede generalizar el Lagrangiano para describir campos vectoriales masivos, lo que da lugar a la ecuación de Proca. A este punto, se puede obtener el Lagrangiano para una partícula escalar real, a partir de la componente escalar del campo vectorial y mostrar que dicho Lagrangiano da lugar a la ecuación de Klein-Gordon. Tomando la componente escalar como un campo independiente se puede usar el principio gauge local para estudiar sus interacciones con los campos gauge. Usando conceptos de mecánica cuántica

se puede generalizar el potencial del Lagrangiano para el campo escalar de modo que se pueda interpretar su masa como las oscilaciones del campo alrededor de estado de energía fundamental, el vacío. Se puede estudiar a partir de allí, la ruptura espontánea de simetría. Con estos ingredientes se puede construir finalmente el Lagrangiano bosónico del Modelo Estándar.

Después de esto, se puede introducir el campo de Dirac como la solución a la ecuación equivalente a la ecuación Schrödinger pero compatible con la relatividad especial. Luego de definir el espín y la helicidad se impone la invarianza gauge local del Modelo Estándar al Lagrangiano de Dirac y se obtiene de esta forma el Lagrangiano completo del Modelo Estándar.

En el primer capítulo se ha abordado la formulación Lagrangiana de la Teoría de Campos Clásica. En la sección 1.1 (ver Anexo 2), se formula el Principio de Mínima Acción para sistemas de partículas y se establece que la cantidad a minimizar corresponde al Lagrangiano del sistema. Este Lagrangiano depende de coordenadas generalizadas de desplazamiento y su derivada temporal.

En la sección 1.2 se construye el sistema continuo más simple correspondiente a las oscilaciones de una cuerda unidimensional. Esta se construye suponiendo un sistema discreto de partículas unidas por resortes que oscilan alrededor de su punto de equilibrio. Usando las técnicas de la sección 1.1 se construye el Lagrangiano interpretando como desplazamiento el campo que describe las oscilaciones de cada partícula. Tomando el límite de infinitas partículas y separación cero, se reescribe la Acción en términos de la densidad Lagrangiana y se establece que para sistemas continuos es dicha densidad Lagrangiana la que hay que minimizar para establecer el principio de mínima acción. Tenemos entonces de un lado la Lagrangiana como punto de partida para describir las coordenadas de sistemas discretos, y la densidad Lagrangiana para describir los campos de desplazamiento de sistemas continuos.

En la sección 1.3 se usan métodos variacionales para calcular la variación de la acción debida a transformaciones de los campos (transformaciones internas) y de las coordenadas (transformaciones externas). Con este resultado se derivan las ecuaciones de Euler-Lagrange en términos de la densidad Lagrangiana y se demuestra el Teorema de Noether. Para simetrías internas se encuentra la expresión para la corriente conservada  $J^\mu$  en términos de la densidad Lagrangiana. Para simetrías externas se encuentra la expresión para el tensor  $T^{\mu\nu}$ , que en sistemas relativistas se interpreta como el tensor de momento-energía  $T^{\mu\nu}$ .

De este modo dada una densidad Lagrangiana, las cantidades a calcular corresponden a la ecuación de movimiento resultante de la ecuaciones de Euler Lagrange, la corriente conservada  $J^\mu$  si la densidad de Lagrangiana posee alguna simetría continua, y el tensor  $T^{\mu\nu}$ .

Para la densidad Lagrangiana que da lugar a la ecuación de Schrödinger en la sección 1.4, la simetría interna de invarianza de fase da lugar a la conservación de la probabilidad,  $\int_V T_0^0 d^3x$  da lugar a la energía del sistema, y la integral de  $T_0^i$  da lugar al correspondiente número de onda de la solución de onda plana para la ecuación de Schrödinger.

La densidad Lagrangiana para la cuerda unidimensional no posee simetrías internas continuas. Con respecto a las simetrías externas, en la sección 1.5 se muestra que para interpretar correctamente el tensor  $T_\nu^\mu$  en este caso, es preciso cuantizar el campo que describe las oscilaciones de la cuerda. Al cuantizarlo se encuentra que éste describe una partícula que transporta energía, y en el límite en el cual la velocidad de la onda es la velocidad de la luz, la partícula correspondiente también transporta momentum. De hecho, para que una onda sea solución a las ecuaciones que describen las oscilaciones de una cuerda unidimensional relativista se requiere que su frecuencia y número de onda satisfagan la ecuación de energía-momento relativista con masa cero. La adición de un término de masa al Lagrangiano correspondiente, da lugar a la ecuación de Klein-Gordon para un campo real.

En el segundo capítulo se estudia la versión covariante de la ecuaciones de Maxwell. Después

de introducir las unidades naturales en la sección 2.1 y la notación relativista en la sección 2.2, la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell se desarrolla en la sección 2.3. Allí se explota la invarianza gauge para encontrar el Lagrangiano electromagnético, el cual se reduce a las ecuaciones de Klein-Gordon con masa igual a cero cuando se escoge el Gauge de Lorentz. En la sección 2.4, se modifican las ecuaciones de Maxwell para permitir un término de masa. Cómo dicho término rompe la invarianza gauge de la teoría, el gauge de Lorentz pasa a ser una condición ineludible que da lugar a la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial.

En el tercer capítulo se introduce la ecuación de Klein–Gordon como un caso particular de la ecuación de Proca. Se muestra que dicha ecuación exhibe una simetría discreta de paridad para el caso de un campo real. En las secciones subsiguientes se aumenta el Lagrangiano adicionando más grados de libertad de la misma masa y se muestra como va aumentando la simetría de una simetría discreta a simetrías continuas abelianas y no abelianas. A la luz de teorema de Noether estas simetrías dan lugar a cargas conservadas globalmente. En la sección 3.3 se establece el principio gauge local para imponer que la carga se conserve localmente. Esto da lugar a la aparición del campo gauge asociado a las interacciones electromagnéticas y a la dinámica asociada a la interacción del campo escalar complejo en presencia del campo electromagnético. En la sección 3.5 se generaliza el principio gauge local al caso no Abelianas, y en la sección 3.6 se combinan el caso Abelianas con el no Abelianas. Las nuevas características de las ecuaciones del campo gauge no Abelianas se ilustran usando la representación adjunta del Grupo no Abelianas en la sección 3.7.

En el cuarto capítulo se repite el mismo procedimiento del anterior capítulo pero reemplazando el potencial escalar de  $\frac{1}{2}m^2\phi^2$  a  $\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ . De modo que  $\mu$  no puede interpretarse como un parámetro de masa. Este potencial contiene un conjunto degenerado de vacíos que no respetan la invarianza del Lagrangiano. El análisis del espectro partículas alrededor de uno de estos mínimos da lugar a bosones de Higgs masivos, sección 4.1, bosones de Goldstone, sección 4.2, y campos gauge masivos, sección 4.3 a través del mecanismo de ruptura espontánea de la simetría. La sección 4.4 es un aplicación de todos los conceptos y técnicas desarrollados al caso del sector bosónico del Modelo Estándar de las partículas elementales.

En el quinto capítulo, basándonos en principios de simetría, se encuentra el Hamiltoniano de la Ecuación de Schrödinger dependiente sólo de primera derivadas y que es compatible con la ecuación de Klein–Gordon. Este corresponde la ecuación de Dirac que describe los fermiones del Modelo Estándar. El Hamiltoniano resulta ser en este caso una combinación lineal de matrices que satisfacen el álgebra de Dirac. El Lagrangiano de Dirac, resulta tener una invarianza abeliana global. En la sección 5.2 se usa el principio gauge local para hacer que la carga asociada a la transformación abeliana sea local. Como antes esto da lugar a la aparición del campo gauge asociado a las interacciones electromagnéticas y a la dinámica asociada a la interacción del campo fermiónico en presencia del campo electromagnético. En la sección 5.6 se definen la helicidad izquierda y derecha de los fermiones.

En el capítulo seis, se construye el Lagrangiano leptónico gauge local para el Grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  que describe correctamente las interacciones débiles y electromagnéticas. Como 3 de los 4 bosones gauge son masivos debe introducirse un potencial escalar que rompa espontáneamente la simetría. En la sección 5.3 se introduce el grupo gauge local no Abelianas responsable de las interacciones fuertes entre quarks y que completa la estructura de grupo del Modelo Estándar de las partículas elementales.

La página web del curso está en:

<http://gfif.udea.edu.co/tikiwiki/showpage?htcc>



# Capítulo 1

## Teoría Clásica de Campos

### 1.1. Principio de Mínima Acción

El Principio de Mínima acción establece, una vez fijado el espacio de coordenadas generalizadas sobre el espacio de configuración, que de todas las trayectorias posibles que transcurren entre  $t_1$  y  $t_2$ , el sistema escogerá aquella que minimice la acción  $S$  [8]. La magnitud de la acción viene dada para cada trayectoria por la integral:

$$S [q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1.1)$$

Donde:  $q_i(t)$  son las coordenadas paramétricas de una trayectoria posible.  $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ , es la función lagrangiana del sistema.

Puede probarse mediante principios variacionales, que de todas las trayectorias posibles, la que hace estacionaria la anterior expresión es la que satisface la siguiente condición  $i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (1.2)$$

conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange. La demostración se hará más adelante para el caso en el que las coordenadas generalizadas corresponden a funciones de campo.

De momento mostraremos como la segunda ley de Newton [10], puede escribirse en la forma de la ec. (1.2).

$$\begin{aligned} F &= ma & (1.3) \\ -\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ &= m \frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right] \end{aligned}$$

Podemos introducir el Lagrangiano a cada lado de la igualdad adicionando términos con la respectiva derivada parcial cero:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) \right].$$

Reemplazando  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) = T - V$ , obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Una forma más rigurosa de escribir la ec. (1.3) puede encontrarse en [8].

El Hamiltoniano del sistema se obtiene definiendo la variable canónica conjugada de  $x$

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (1.4)$$

y usando la transformada de Lagrange

$$H = p\dot{x} - L = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V = T + V \quad (1.5)$$

Para visualizar el principio de mínimo de acción se recomienda seguir las actividades del programa interactivo en Java disponible online en [9]. Allí se considera el problema de un objeto de 0.2Kg lanzado hacia arriba y retornado al punto de partida 3 segundos despues. Si dividimos la trayectoria en tres intervalos como se muestra en la Fig. 1.1, teniendo en cuenta que la velocidad es la pendiente del segmento, para  $\Delta t = 0.75$  s  $x_1 = 11.13$  m,  $t_1 = 0.75$  s,  $x_2 = 0$  m,  $t_2 = 1.5$  s, tenemos que para la trayectoria mostrada

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt \approx \sum_i (T - V)_i \Delta t \\ &\approx \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{1}{2} m \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 - mgx_i \right] \Delta t \\ &\approx 16.67 \text{ J s} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Iterando el proceso se puede encontrar numéricamente (o a mano) la trayectoria que minimiza la acción mostrada en la Fig. 1.2 Para una dimensión podemos definir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial}{\partial q} L(q, \dot{q}, t) \quad \text{or} \quad L(q, \dot{q}, t) = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dq. \quad (1.7)$$

La ec. (1.1) puede escribirse entonces como

$$S[q_i, \dot{q}_i] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dq dt. \quad (1.8)$$

Para sistemas continuos es conveniente usar la densidad Lagrangiana. Abordaremos a continuación el sistema continuo correspondiente a la cuerda clásica unidimensional para construir la densidad Lagrangiana correspondiente. A partir de ella demostraremos las ecuaciones de Euler Lagrange para dicho sistema.

## 1.2. La cuerda clásica unidimensional

Considere una cuerda de longitud  $L$  formando un círculo de radio  $R$ . Es conveniente considerar un conjunto de  $N$  partículas de masa  $m$  a lo largo de la circunferencia, unidas por resortes de longitud  $l$

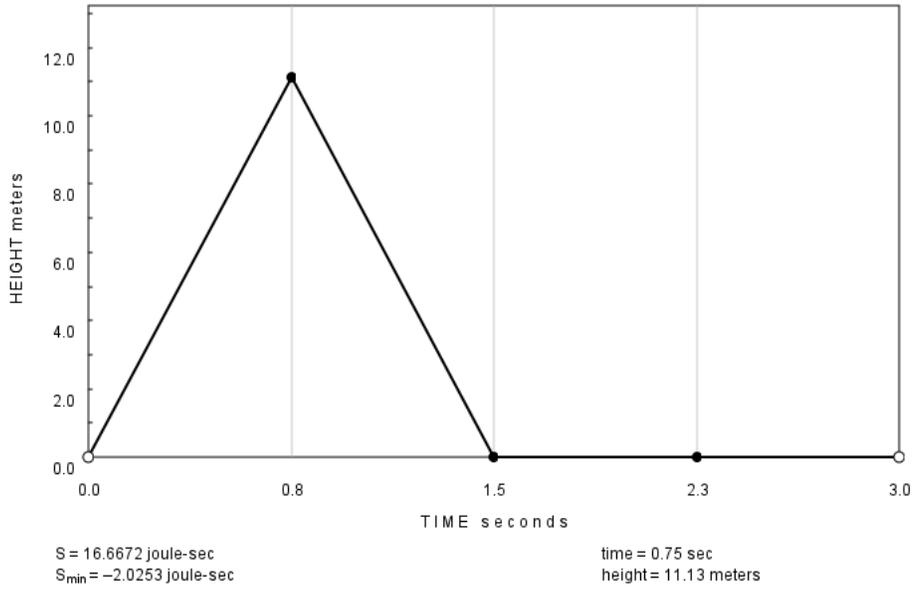


Figura 1.1: Ejemplo de cálculo de la Acción para una trayectoria arbitraria

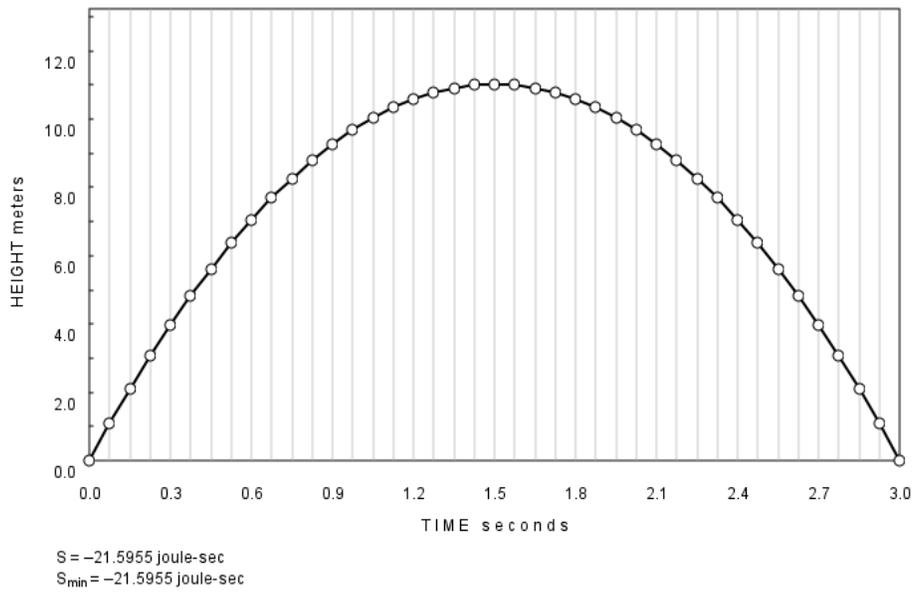


Figura 1.2: Trayectoria que minimiza la Acción

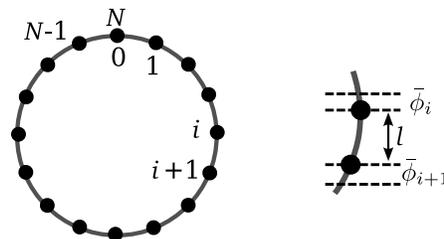


Figura 1.3: Modelo Cuerda

y constante elástica  $k$ . Los modos vibracionales de la cuerda a lo largo de la circunferencia se obtienen en límite de  $N \rightarrow \infty$  y  $l \rightarrow 0$

De acuerdo a la figura 1.3, si  $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t)$  es el desplazamiento de la  $i$ -ésima masa desde su posición de equilibrio, entonces el Lagrangiano del sistema de  $N$  partículas y resortes es:

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2, \quad (1.9)$$

$$= \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2. \quad (1.10)$$

Si  $\mu$  es la densidad de la cuerda,  $T$  la tensión y  $v$  la velocidad, entonces

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{l} \\ T &= kl \\ v^2 &= \frac{T}{\mu}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

(1.11) En el límite  $l \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ , tenemos

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t) \rightarrow \bar{\phi}(z, t), \quad (1.12)$$

que representa la función de campo del desplazamiento de una masa infinitesimal de su posición de equilibrio. Entonces

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{l} l (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (kl) l \left( \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \mu (\dot{\bar{\phi}}_i)^2 l - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} T \left( \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 l. \end{aligned} \quad (1.13)$$

En el límite continuo  $\sum(\dots)l \rightarrow \int(\dots)dz$ , entonces

$$L = \int_0^L \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \int_0^L \mathcal{L} dz, \quad (1.14)$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.15)$$

y

$$S = \int \mathcal{L} dt dz. \quad (1.16)$$

Definiendo

$$\phi = \sqrt{T} \bar{\phi}, \quad (1.17)$$

tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu}{T} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{T} \left( \frac{\partial\bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right],\end{aligned}\tag{1.18}$$

Note que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\tag{1.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right] = -\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\tag{1.20}$$

Si en la ec. (1.10), tomamos como coordenadas generalizadas las  $N$   $\dot{\bar{\phi}}_i$  y  $\bar{\phi}_i$ , entonces, podemos obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.2):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} = 0, \quad i = 0 \text{ hasta } N - 1.\tag{1.21}$$

En el límite  $l \rightarrow 0$  y  $N \rightarrow \infty$ , y usando las ecs. (1.19) y (1.20),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i} \right) &= \frac{d}{dt} \left( m \dot{\bar{\phi}}_i \right) = m \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2} \\ &= Tl \left( \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2} \right) \\ &\rightarrow l\sqrt{T} \left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)\end{aligned}\tag{1.22}$$

$$= l\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right].\tag{1.23}$$

Para el segundo término de la ec. (1.21) nótese que

$$\begin{aligned}-\sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= -(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0)^2 - (\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 - \dots - (\bar{\phi}_{(i-1)+1} - \bar{\phi}_{i-1})^2 - (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 - \dots \\ &= -(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_0)^2 - (\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1)^2 - \dots - (\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1})^2 - (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 - \dots\end{aligned}\tag{1.24}$$

Entonces

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= -2(\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}) - 2(\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i) \times (-1) \\ &= 2l \left[ \frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} - \frac{\bar{\phi}_i - \bar{\phi}_{i-1}}{l} \right].\end{aligned}$$

Si  $\bar{z}_i$  es el punto medio del intervalo entre  $z_{i-1}$  y  $z_i$ , entonces en el límite de  $l \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 &= 2l^2 \left\{ \frac{[\bar{\phi}(z_{i+1}, t) - \bar{\phi}(z_i, t)]/l}{l} - \frac{[\bar{\phi}(z_i, t) - \bar{\phi}(z_{i-1}, t)]/l}{l} \right\} \\
&= 2l^2 \left[ \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{z}_{i+1}, t)/\partial z}{l} - \frac{\partial \bar{\phi}(\bar{z}_i, t)/\partial z}{l} \right] \\
&= 2l^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} \\
&\rightarrow \frac{2l^2}{\sqrt{T}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Usando las ecs. (1.25) (1.11), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} &= \frac{1}{2}k \left[ -\frac{\partial}{\partial \bar{\phi}_i} \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2 \right] \\
&\rightarrow \frac{1}{2}k \left( \frac{2l^2}{\sqrt{T}} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\
&\rightarrow l\sqrt{T} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

$$= -l\sqrt{T} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right]. \tag{1.27}$$

De las ecuaciones (1.22) y (1.26), obtenemos la ecuación de movimiento para el campo  $\phi(z, t)$ :

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \tag{1.28}$$

que corresponde a la ecuación de onda en una dimensión. En tres dimensiones obtendríamos:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0. \tag{1.29}$$

De otro lado, de las ecuaciones (1.23) y (1.27), obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para la densidad Lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right] = 0. \tag{1.30}$$

En tres dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial y)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} \right] = 0. \tag{1.31}$$

Definiendo

$$x^\mu = (x^0, x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.32}$$

podemos expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisface  $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu)$ , como

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] = 0,$$

donde, en la última ecuación se ha usado la convención de suma sobre índices repetidos.

Si la densidad Lagrangiana depende también directamente de  $\phi$ ,  $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu, \phi)$ , entonces la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas  $\partial\phi/\partial x^\mu$  y  $\phi$ , es

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.33)$$

Ésta última ecuación se deducirá usando métodos variacionales en la siguiente sección

## 1.3. Principio de Mínima Acción para $\mathcal{L}$

### 1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definamos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.34)$$

En tres dimensiones, la acción de la ec. (1.16), queda

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (1.35)$$

donde  $d^4x = dt dx dy dz$ . Considere primero una variación sólo de los campos, tal que ( $x = x^\mu$ )

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \quad (1.36)$$

De otro lado, con  $\delta x = x' - x$ , la expansión de Taylor para  $f(x + \delta x)$  es

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \dots \quad (1.37)$$

Para  $\mathcal{L}$ , tenemos de la ec. (1.36)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') &= \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \partial_\mu(\delta\phi)) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Entonces, de imponer que  $\delta S = 0$ , tenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= S' - S = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \\ &= \int_R d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right] \\ &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta\phi + \int_R d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] \\ \delta S &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta\phi + \int_\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] d\sigma_\mu = 0. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Donde hemos aplicado el Teorema de Gauss

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.40)$$

generalizado a cuatro dimensiones. Como la variación de  $\delta\phi$  es cero sobre la hipersuperficie  $\sigma$  resulta

$$\int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta\phi = 0. \quad (1.41)$$

Como  $\delta\phi$  es cualquier posible variación entre las fronteras de la hipersuperficie, el integrando debe anularse y resultan las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.42)$$

La densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu(\eta(x)) \quad (1.43)$$

donde  $\eta(x)$  es cualquier función de los campos de la densidad Lagrangiana original, da lugar a la Acción

$$\begin{aligned} S' &= \int_R d^4x \mathcal{L}' = \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_R d^4x \partial_\mu \eta \\ &= \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_\sigma \eta d\sigma^\mu \\ &= S, \end{aligned} \quad (1.44)$$

para una hipersuperficie suficientemente grande. De modo que dos densidades lagrangianas que difieran solo en derivadas totales dan lugar a la misma Acción.

Usando el principio de mínima acción en términos del campo  $\phi$ , tenemos que para la densidad Lagrangiana (1.18)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (1.45)$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.42)

$$\begin{aligned} \partial_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \right] + \partial_3 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_3 \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial t)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \phi / \partial z)} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

que corresponde a la ec. (1.28).

Generalizando a tres dimensiones vemos que la ecuación para una onda propagándose a una velocidad  $v$ , eq. (1.29),

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0, \quad (1.47)$$

proviene de una densidad Lagrangiana (hasta derivadas totales)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \nabla \phi \cdot \nabla \phi \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_i \phi \partial_i \phi \right]. \end{aligned} \quad (1.48)$$

### 1.3.2. Teorema de Noether para simetrías internas

Para un campo complejo la ec. (1.35) se generaliza a

$$S[\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*] = \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) \quad (1.49)$$

Usando el mismo procedimiento, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right] \right\} \delta \phi + \int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) \right] \right\} \delta \phi^* \\ &\quad + \int_R d^4x \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Usando de nuevo el Teorema de Gauss resultan las ecuaciones de Euler Lagrange para  $\phi$  y  $\phi^*$

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0. \quad (1.51)$$

De otro lado, si asumimos que  $\phi$  y  $\phi^*$  satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange, en lugar de asumir que  $\delta \phi$  y  $\delta \phi^*$  se anulan sobre la hipersuperficie, los dos primeros términos de la ec. (1.50) se anulan y tendremos que para que  $\delta S = 0$ :

$$\int_R d^4x (\partial_\mu J^\mu) = 0, \quad (1.52)$$

donde,

$$J^\mu = \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right] \delta \phi + \delta \phi^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] \quad (1.53)$$

Entonces  $J^\mu$  satisface la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.55)$$

Integrando con respecto al volumen

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3x + \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x &= 0, \\ \int_V \frac{\partial J^0}{\partial t} d^3x + \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} &= 0, \end{aligned} \quad (1.56)$$

Escogiendo una superficie suficientemente grande que abarque toda la fuente de densidad  $\rho = J^0$ , de la corriente  $\mathbf{J}$ , el segundo integrando es cero y

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = 0. \quad (1.57)$$

Este resultado es conocido como Teorema de Noether. Éste establece que para toda transformación continua del tipo (1.36), debe existir una cantidad conservada,  $dQ/dt = 0$ , que en este caso corresponde a

$$Q = \int_V \rho d^3x. \quad (1.58)$$

### 1.3.3. Teorema de Noether para simetrías externas

Para el caso de una simetría externas, por ejemplo la correspondiente a una traslación espacio-temporal

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta a^\mu \\ \delta x^\mu &= \delta a^\mu \end{aligned} \quad (1.59)$$

tenemos

$$\phi'(x') = \phi'(x + \delta a) \quad (1.60)$$

$$\approx \phi'(x) + \frac{\partial \phi'(x)}{\partial x^\mu} \delta a^\mu \quad (1.61)$$

$$= [\phi(x) + \delta \phi(x)] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\phi(x) + \delta \phi(x)] \delta a^\mu \quad (1.62)$$

$$\approx \phi(x) + \delta \phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta a^\mu, \quad (1.63)$$

donde, por simplicidad,  $\phi$  es de nuevo un campo real. Entonces,

$$\Delta \phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta \phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta a^\mu. \quad (1.64)$$

Para una traslación,  $\Delta \phi(x) = 0$ , ver figura 1.4. De modo que

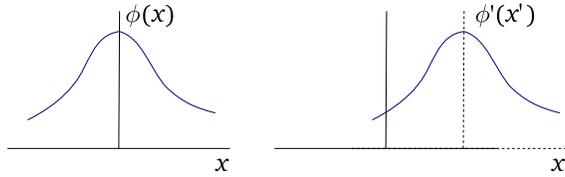
$$\delta \phi = -(\partial_\mu \phi) \delta a^\mu, \quad (1.65)$$

y la transformación del campo  $\phi$  como consecuencia de la traslación es

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - \delta \phi(x) = \phi(x) + (\partial_\mu \phi(x)) \delta a^\mu. \quad (1.66)$$

Si  $a^\mu$  es constante (un análisis más general es hecho en [3])

$$d^4x' = d^4x \quad (1.67)$$


 Figura 1.4: Traslación de función y coordenadas en una dimensión:  $\phi(x) = \phi'(x')$ 

En este caso, asumiendo que el campo satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange y usando la ec. (1.65) y (1.42) tenemos

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', x') - \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) \\
 &= \int_R d^4x \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \partial_\mu(\delta\phi), x + \delta a) - \int_R d^4x \mathcal{L} \\
 &\approx \int_R d^4x \left[ \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta a^\mu \right] - \int_R d^4x \mathcal{L} \\
 &= \int_R d^4x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta a^\mu \right] \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \left[ \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \right] \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta a^\mu \right\} \\
 &= \int_R d^4x \left\{ \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta a^\mu \right\} \\
 &= \int_R d^4x \partial_\mu \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \delta a^\nu \\
 &= \int_R d^4x (\partial_\mu T_\nu^\mu) \delta a^\nu = 0.
 \end{aligned} \tag{1.68}$$

Y por consiguiente

$$\partial_\mu T_\nu^\mu = 0, \tag{1.69}$$

donde

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \tag{1.70}$$

El tensor  $T_\nu^\mu$  proviene de asumir la homogeneidad del espacio y el tiempo y es llamado el tensor de momentum-energía. La densidad Hamiltonina se obtiene de  $T_0^0$

$$\mathcal{H} = T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{1.71}$$

$$= \pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{L}. \tag{1.72}$$

Comparando con la expresión correspondiente en la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica, tenemos que si  $\phi(x)$  es la variable canónica, la variable canónica conjugada es  $\pi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi(x) / \partial t)}. \tag{1.73}$$

El teorema de Noether en este caso establece que la invarianza de la Acción bajo traslaciones temporales da lugar a la ecuación de continuidad (1.69) para  $\nu = 0$

$$\partial_\mu T_0^\mu = 0 \quad (1.74)$$

cuya carga conservada corresponde a la energía

$$H = \int_V d^3x T_0^0 = \int_V d^3x \mathcal{H}. \quad (1.75)$$

De igual forma la invarianza bajo traslaciones espaciales da lugar a ecuaciones de continuidad para cada componente  $\nu = i$  ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\partial_\mu T_i^\mu = 0, \quad (1.76)$$

cuyas densidad de cargas conservadas,  $T_i^0$ , que en forma vectorial escribiremos como  $\mathbf{T}^0$ , dan lugar a la conservación del momentum

$$\mathbf{P} = \int_V d^3x \mathbf{T}^0. \quad (1.77)$$

Generalizando a un campo complejo

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (1.78)$$

## 1.4. Aplicación a Mecánica Cuántica

Haciendo  $\hbar = 1$ , el Lagrangiano que da lugar a la ecuación de Schrödinger es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) &= \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - \frac{i}{2} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi \right) + \psi^* V \psi \\ &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi) + \psi^* V \psi. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.51) para la función de onda  $\psi^*$  obtenemos la ecuación de Schrödinger con  $\hbar = 1$ :

$$0 = \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \right] + \partial_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}. \quad (1.80)$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} &= -\frac{i}{2} \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} &= \frac{i}{2} \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi^* + \psi^* V & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= -\frac{i}{2} \partial_0 \psi + V \psi. \end{aligned} \quad (1.81)$$

Entonces, reemplazando la ec. (1.81) en la ec. (1.80), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left( \frac{i}{2} \psi \right) + \partial_i \left( \frac{1}{2m} \partial_i \psi \right) - \left( -\frac{i}{2} \partial_0 \psi + V \psi \right) \\ &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_i \partial_i \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi - V \psi. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Que puede escribirse como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi. \quad (1.83)$$

El Lagrangiano en ec (1.79), y por consiguiente la Acción, es invariante bajo una transformación de fase

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi. \quad (1.84)$$

Por consiguiente, de acuerdo al Teorema de Noether, debe existir una cantidad conservada. La corriente conservada se obtiene de la ec. (1.53). Para los campos  $\psi$  y  $\psi^*$ , tenemos

$$\delta \psi = \psi' - \psi = (e^{i\theta} - 1) \psi \approx i\theta \psi \quad (1.85)$$

$$\delta \psi^* \approx -i\theta \psi. \quad (1.86)$$

Usando además la ec. (1.81) en la definición de  $J^0$  dada por la ec. (1.53), tenemos

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \psi^* (i\theta \psi) + (-i\theta \psi^*) \frac{i}{2} \psi \\ &= \theta \psi^* \psi, \end{aligned} \quad (1.87)$$

y

$$\begin{aligned} J^i &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} \right] \\ &= \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* (i\theta \psi) + (-i\theta \psi^*) \frac{1}{2m} \partial_i \psi \\ &= \frac{i\theta}{2m} (\partial_i \psi^* \psi - \psi^* \partial_i \psi). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Entonces, normalizando apropiadamente la corriente escogiendo  $\theta = 1$ , tenemos

$$J^0 = \psi^* \psi \quad (1.89)$$

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi). \quad (1.90)$$

De acuerdo a la ec. (1.89), la cantidad conservada corresponde a la probabilidad de la función de onda y normalizando apropiadamente la ec. (1.58)

$$Q_\rho = \int_V \psi^* \psi d^3x = 1. \quad (1.91)$$

En cuanto a las simetrías externas, tenemos de la ec. (1.70) que da lugar a las ecuaciones de continuidad (1.74)(1.76)

$$\begin{aligned}\partial_\mu T_0^\mu &= 0, \\ \partial_\mu T_i^\mu &= 0\end{aligned}\tag{1.92}$$

Las cargas conservadas corresponden entonces a  $T_0^0$  y  $T_i^0$ . Usando las ecs. (1.81) en la ec. (1.78)

$$\begin{aligned}T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}(\partial_i \psi) + (\partial_i \psi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} \\ T_i^0 &= -\frac{i}{2} \psi^* (\partial_i \psi) + \frac{i}{2} (\partial_i \psi^*) \psi\end{aligned}\tag{1.93}$$

Entonces, definiendo

$$\mathbf{T}^0 = \frac{i}{2} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi)\tag{1.94}$$

Además

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^0 &= \frac{i}{2} (-\nabla(\psi^* \psi) - \psi^* \nabla - \psi^* \nabla \psi) \\ &= -i \psi^* \nabla \psi + \frac{i}{2} \nabla(\psi^* \psi).\end{aligned}\tag{1.95}$$

Integrando en el volumen

$$\int_V \mathbf{T}^0 d^3x = -i \int_V \psi^* \nabla \psi d^3x - \frac{i}{2} \nabla \int_V \psi^* \psi d^3x\tag{1.96}$$

De acuerdo a la ec. (1.91), la última integral es una constante y

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{T}^0 d^3x &= -i \int_V \psi^* \nabla \psi d^3x \\ \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle &= \int_V \psi^* \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x\end{aligned}\tag{1.97}$$

De modo que  $\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle$  son las cargas conservadas asociadas al valor esperado el operador de momentum

$$\hat{\mathbf{p}} = -i \nabla.\tag{1.98}$$

De otro lado

$$\begin{aligned}T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2} \psi^* \partial_0 \psi + \frac{i}{2} \partial_0 \psi^* \psi - \frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi + \frac{i}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi) - \psi^* V \psi \\ &= -\frac{1}{2m} \partial_i \psi^* \partial_i \psi - \psi^* V \psi\end{aligned}\tag{1.99}$$

Como las corrientes solo están determinadas hasta un factor de proporcionalidad, definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \equiv -T_0^0 &= \frac{1}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi + \psi^* V \psi \\ &= \frac{1}{2m} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) - \frac{1}{2m} \psi^* \nabla^2 \psi + \psi^* V \psi.\end{aligned}\tag{1.100}$$

Integrando sobre el volumen y usando la ec. (1.97)

$$\begin{aligned}
\int_V \mathcal{H} d^3x &= \frac{1}{2m} \int_V \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi) + \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\
&= \frac{1}{2m} \nabla \cdot \int_V (\psi^* \nabla \psi) + \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\
&= \frac{i}{2m} \nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle + \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\
&= \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x.
\end{aligned} \tag{1.101}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
H &\equiv \int_V \mathcal{H} d^3x = \int_V \psi^* \left( -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi d^3x \\
&= \int_V d^3x \psi^* \hat{H} \psi = \langle \hat{H} \rangle.
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Que es un resultado bien conocido de la mecánica cuántica.

Como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \hat{V}, \tag{1.103}$$

podemos escribir la ec. (1.83) como

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi. \tag{1.104}$$

Podemos identificar entonces los operadores de energía y momentum.

$$\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i \nabla. \tag{1.105}$$

Retornando a la ec. (1.97), tenemos que para la solución de partícula libre de la ecuación de Schrödinger

$$\psi = A e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \tag{1.106}$$

la condición de normalización en ec. (1.91) implica que  $|A|^2 = 1/L^3$ , y

$$\int_V \mathbf{T}^0 d^3x = \mathbf{k}. \tag{1.107}$$

Nótese que de la ec. (??) se puede obtener la densidad Hamiltoniana, y usando la ec. (1.71) se puede encontrar la densidad Lagrangiana

## 1.5. Aplicación a la cuerda unidimensional

Para el Lagrangiano en la ec. (1.18), la ecuación de continuidad para la energía es

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T_0^\mu &= 0 \\
\partial_0 T_0^0 + \partial_3 T_0^3 &= 0 \\
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}_z}{\partial z} &= 0
\end{aligned} \tag{1.108}$$

donde  $\mathcal{H} = T_0^0$  es la densidad de energía y  $\mathcal{P}_z = T_3^0$  es el flujo de energía en la dirección  $z$  a lo largo de la cuerda. Mientras que la ecuación de continuidad para la conservación del momentum es

$$\frac{\partial T_3^0}{\partial t} + \frac{\partial T_3^3}{\partial z} = 0. \quad (1.109)$$

Entonces el Hamiltoniano para la cuerda unidimensional se puede obtener de la ec. (1.71)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{v^2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.110)$$

y

$$H = \int_0^L \mathcal{H} dz. \quad (1.111)$$

De acuerdo al Teorema de Noether,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (1.112)$$

que establece la conservación de la energía. Además

$$P_z = - \int_0^L T_3^0 dz. \quad (1.113)$$

La componente  $z$  del vector de flujo de energía (vector de Poynting) del campo  $\phi$  esta dado por  $T_3^0$ . De la ecuación para  $T^{\mu\nu}$  (1.70)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)} (\partial\phi/\partial t) \\ &= - \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{\partial\phi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

De otro lado

$$\begin{aligned} T_3^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} (\partial\phi/\partial z) \\ &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

La cantidad conservada corresponde en este caso al momentum en la dirección  $z$

$$P_z = - \int_V d^3x T_3^0. \quad (1.116)$$

Para encontrar la forma explicita del Hamiltoniano y de  $P_z$ , proponemos como solución general a la ecuación de onda (1.28)

$$\phi(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}], \quad (1.117)$$

Para que se satisfagan las condiciones periódicas  $\phi(0, t) = \phi(L, t)$ , donde  $L$  es la longitud de la cuerda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^* e^{i\omega_n t}] = \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{i(k_n L - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n L - \omega_n t)}], \quad (1.118)$$

Igualando cada coeficiente  $a_n$  (o  $a_n^*$ )

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_n t} &= e^{i(k_n L - \omega_n t)} \\ e^{ik_n L} &= 1 \end{aligned} \quad (1.119)$$

y

$$k_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.120)$$

De la ecuación de onda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= 0 \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] \right\} \\ - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.121)$$

Igualando para cada coeficiente  $a_n$  y  $a_n^*$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] \right\} \\ - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left\{ \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] \right\} = 0, \end{aligned} \quad (1.122)$$

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega_n}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} - a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] \\ - ik_n \frac{\partial}{\partial z} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} - a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] = 0, \end{aligned} \quad (1.123)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\omega_n^2}{v^2} [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] \\ + k_n^2 [a_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^* e^{-i(k_n z - \omega_n t)}] = 0 \\ \left( -\frac{\omega_n^2}{v^2} + k_n^2 \right) [a_n \phi_n(z, t) + a_n^* \phi_n^*(z, t)] = 0, \end{aligned} \quad (1.124)$$

donde

$$\phi_n(z, t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(k_n z - \omega_n t)}. \quad (1.125)$$

Entonces, se debe satisfacer que

$$\begin{aligned}\omega_n^2 &= v^2 k_n^2 \\ \omega_n^2 &= v^2 \frac{4\pi^2 n^2}{L^2}.\end{aligned}\tag{1.126}$$

$k_n$  y  $\omega_n$  satisfacen

$$k_{-n} = -k_n, \quad \omega_{-n} = \omega_n.\tag{1.127}$$

La ecuación (1.117) queda

$$\phi(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{v^2}{2\omega_n} \right)^{1/2} [a_n \phi_n(z, t) + a_n^* \phi_n^*(z, t)],\tag{1.128}$$

y las funciones  $\phi_n$  satisfacen las siguientes condiciones de normalización

$$\int_0^L dz \phi_n^*(z, t) \phi_m(z, t) = \delta_{nm}.\tag{1.129}$$

Además

$$\int_0^L dz \phi_n(z, t) \phi_m(z, t) = \delta_{n,-m} e^{-2i\omega_n t}.\tag{1.130}$$

En tal caso de la ec. (1.111), tenemos (ver problema 2)

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2v^2} \int_0^L dz \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \int_0^L dz \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n a_n^* a_n\end{aligned}\tag{1.131}$$

En unidades naturales donde  $\hbar = 1$ ,  $E = \hbar\omega = \omega$ , y la frecuencia  $\omega$  tiene unidades de energía. Además

$$P_z = - \int_0^L T_3^0 dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n a_n^* a_n\tag{1.132}$$

De nuevo el número de onda representa el vector de flujo de energía.

En una teoría cuántica de campos, el campo  $\phi$  pasa a ser un operador  $\hat{\phi}$ . Esto puede hacerse de dos maneras. Por el método de cuantización canónica, usando la variable canónica conjugada  $\pi(z, t)$  definida en la ec. (1.73), que para el caso de la cuerda unidimensional corresponde a

$$\pi(z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}.\tag{1.133}$$

Entonces los correspondientes operadores para  $\phi$  y  $\pi$  deben satisfacer ( $\hbar = 1$ )

$$\begin{aligned}[\hat{\phi}(z, t), \hat{\pi}(z', t)] &= i\delta(z' - z) \\ [\hat{\phi}(z, t), \hat{\phi}(z', t)] &= 0 \\ [\hat{\pi}(z, t), \hat{\pi}(z', t)] &= 0\end{aligned}\tag{1.134}$$

En este caso  $\hat{\phi}$ , puede expandirse en términos de los operadores  $\hat{a}$  y  $\hat{a}^\dagger$

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(z, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{v^2}{2\omega_n L} \right)^{1/2} [\hat{a}_n e^{i(k_n z - \omega_n t)} + \hat{a}_n^\dagger e^{i(k_n z + \omega_n t)}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_n\end{aligned}\tag{1.135}$$

y  $\hat{\phi}$  y  $\hat{\pi}$  satisfacen las relaciones de conmutación (1.134) si

$$\begin{aligned}[\hat{a}_n, \hat{a}_n^\dagger] &= 1 \\ [\hat{a}_n, \hat{a}_m] &= 0 \\ [\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m^\dagger] &= 0.\end{aligned}\tag{1.136}$$

El Hamiltoniano es ahora un operador dado por

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \hat{N}_n,\tag{1.137}$$

Con el operador de número  $\hat{N}_n$ , dado por

$$\hat{N}_n = \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n.\tag{1.138}$$

Ya que  $\hat{N}_n$  es Hermítico, *cada*  $\hat{N}_n$  este tiene un conjunto completo de autoestados ortonormales [7]

$$\begin{aligned}\hat{N}_n |m\rangle &= m |m\rangle \\ \langle m' | m \rangle &= \delta_{m'm} \\ \mathbf{1} &= \sum_m |m\rangle \langle m|.\end{aligned}\tag{1.139}$$

Utilizando las relaciones de conmutación de  $\hat{N}_n$  con  $a_n$  y  $\hat{a}_n^\dagger$  se puede demostrar que

$$\begin{aligned}\hat{a}_n^\dagger |m\rangle &= \sqrt{m+1} |m+1\rangle \\ \hat{a}_n |m\rangle &= \sqrt{m} |m-1\rangle.\end{aligned}\tag{1.140}$$

y por consiguiente

$$\hat{N}_n |m\rangle = m |m\rangle\tag{1.141}$$

Esto significa que todos los estados se pueden generar desde un estado base  $|0\rangle$

$$|m\rangle = \frac{(\hat{a}_n^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle.\tag{1.142}$$

A los estados  $|m\rangle$  se les llama estados de fonones.  $m$  corresponde al número de fonones de energía  $\omega_n$ .  $\hat{a}_n^\dagger$  crea un fonón de energía  $\omega_n$ , y  $a_n$  destruye un fonón de frecuencia  $\omega_n$ . Al estado  $|0\rangle$  se le llama el vacío.

Para dos operadores de número de frecuencias diferentes  $\omega_{n_1}$  y  $\omega_{n_2}$  tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{N}_{n_1}|m_{n_1}\rangle &= m_{n_1}|m_{n_1}\rangle & \widehat{N}_{n_2}|m_{n_2}\rangle &= m_{n_2}|m_{n_2}\rangle \\ \widehat{N}_{n_1}|m_{n_2}\rangle &= 0 & \widehat{N}_{n_2}|m_{n_1}\rangle &= 0.\end{aligned}\quad (1.143)$$

De este modo

$$\widehat{H}|m_{n_1}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \widehat{N}_n |m_{n_1}\rangle = \omega_{n_1} m_{n_1} |m_{n_1}\rangle. \quad (1.144)$$

El autoestado del Hamiltoniano para  $I$  conjuntos de fonones de diferentes frecuencias puede escribirse como

$$|m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_I}\rangle. \quad (1.145)$$

A tales estados, con un número definido de fonones de varias frecuencias, se les llama estados de *Fock*.

Los autovalores del Hamiltoniano para un estado de Fock son

$$\widehat{H}|m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_I}\rangle = \sum_{i=1}^I \omega_{n_i} m_{n_i} |m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_i}\rangle, \quad (1.146)$$

de modo que la energía de un estado de Fock es

$$E = \langle m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_I} | \widehat{H} | m_{n_1}, m_{n_2}, \dots, m_{n_I} \rangle = \sum_{i=1}^I \omega_{n_i} m_{n_i}. \quad (1.147)$$

Los fonones están asociados a frecuencias, o modos normales de la cuerda, de modo que están relacionados al movimiento de la cuerda como un todo, mientras que las partículas de la cuerda están localizadas en el espacio de posiciones. En general pueden existir partículas asociadas a campos abstractos que no tienen conexión con ningún sistema mecánico.

Finalmente, si el número de cuantos de una determinada frecuencia  $\omega_{n_1}$  se puede conocer sin ninguna incertidumbre entonces el campo  $\phi_{n_1}(z, t) = \langle n_1 | \hat{\phi}_{n_1}(z, t) | n_1 \rangle$  es completamente incierto. Entre mayor sea la incertidumbre en el número de fonones de una determinada frecuencia con mayor precisión se podrá determinar el campo clásico asociado a esa frecuencia [7].

Retornando a la ec. (1.144) podemos ver que  $\hat{\phi}_{n_1}$  puede interpretarse como una partícula que transporta una energía ( $\hbar = 1$ )

$$\langle m_{n_1} | \widehat{H} | m_{n_1} \rangle = \omega_{n_1} m_{n_1} \quad (1.148)$$

Para una interpretación completa de partícula se debe mostrar que el campo cuantizado también transporta momentum. De hecho

$$\langle m_{n_1} | \widehat{P}_z | m_{n_1} \rangle = k_{n_1} m_{n_1} \quad (1.149)$$

La interpretación del número de onda de un campo cuántico como momentum es más simple en el contexto de la relatividad especial. La ec. (1.126), puede interpretarse como la ecuación energía momentum de la relatividad especial ( $c = 1$ )

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \quad (1.150)$$

si  $m = 0$  y  $v = c$ , es decir, para ondas propagándose relativísticamente

$$\omega_{n_1}^2 = k_{n_1}^2 \quad (1.151)$$

El momentum de la partícula coincide con el correspondiente número de onda

Entonces, la interpretación del campo  $\hat{\phi}$  como partícula, es más directa en un contexto donde se combine la relatividad especial con la cuantización del campo mismo. Obviando estos detalles, en adelante llamaremos partícula al campo clásico.

Si modificamos el Lagrangiano en ec. (1.18), para incluir un término adicional ( $v = c = 1$ )

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 - m^2\phi^2 \right]. \quad (1.152)$$

entonces, la ec. (1.135) es solución a la ecuación resultante de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + m^2\phi &= 0 \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 \right) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (1.153)$$

si

$$\omega^2 = k^2 + m^2. \quad (1.154)$$

De este modo  $m$  puede interpretarse como la masa de la partícula.

Generalizando a 3 dimensiones tenemos el Lagrangiano de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi - \frac{1}{2} m^2\phi^2, \quad (1.155)$$

que dan lugar a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0. \quad (1.156)$$

## 1.6. Problemas

- 1.1 Obtenga el Hamiltoniano a partir de Lagrangiano en(1.14) y encuentre la expresión para la densidad Lagrangiana en términos de  $\phi$ .
- 1.2 Demuestre las ecuaciones (1.131)(1.132).
- 1.3 ¿Que cambios se requieren al Lagrangiano de la ecuación de Dirac para que la Acción sea invariante bajo transformaciones Gauge Locales?. Ver sección 3.4.
- 1.4 A partir del Lagrangiano de la Mecánica Cuántica invariante bajo transformaciones de fase local encuentre la ecuación de Schrödinger en presencia del campo electromagnético. Ver sección 3.4.
- 1.5 Calcule  $T_0^i$  para el Lagrangiano de Schrödinger

$$\begin{aligned} T_0^i &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi)} \partial_0\psi + \partial_0\psi^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi^*)} \\ &= \frac{1}{2m} (\partial_i\psi^* \partial_0\psi + \partial_0\psi^* \partial_i\psi) \end{aligned} \quad (1.157)$$

De modo que  $T_i^0 \neq T_0^i$ .



# Capítulo 2

## Campos vectoriales

### 2.1. Unidades Naturales

Las *unidades naturales* son unidades físicas de medida definidas en términos de constantes físicas universales [19]. El primer conjunto consiste de unidades naturales, las *unidades de Planck* [20], fue formulado por el propio Planck después de establecer la última constante universal, que lleva su nombre. En palabras de Planck

...ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch außerirdische und außermenschliche Kulturen notwendig behalten und welche daher als »natürliche Maßeinheiten bezeichnet werden können...

...These necessarily retain their meaning for all times and for all civilizations, even extraterrestrial and non-human ones, and can therefore be designated as “natural units”...

De este modo, estas unidades son naturales debido a que el origen de su definición proviene solo de propiedades de la naturaleza y no de alguna construcción humana. A diferencia de otros conjuntos de unidades naturales las unidades de Planck donde

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1, \quad c = 1, \quad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1, \quad k = 1, \quad (2.1)$$

están basadas sólo en las propiedades del espacio libre, y no en las propiedades (tales como carga, masa, tamaño o radio) de algún objeto o partícula elemental.

Las constantes físicas que suelen normalizarse se escogen del conjunto dado por la ec. (2.1) y

$$e, \quad m_e, \quad m_p. \quad (2.2)$$

Teniendo en cuenta que  $1 \text{ eV} = 1.602 \ 176 \ 487(40) \times 10^{-19} \text{ J}$ .

$$\begin{aligned} 10^{-9} \text{ GeV} &= 1.602 \ 176 \ 487(40) \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ GeV} &= 1.602 \ 176 \ 487(40) \times 10^{-10} \text{ J} \end{aligned} \quad (2.3)$$

#### Example 2.1.0.1

Calcule la energía cinética de un mosquito de 2 mg, moviéndose a 1.6 Km/h

$$V = 1.6 \times 10^{-19} \text{ Joules}$$

$$1 \text{ TeV} = 1.6 \times 10^{-19} \times 10^{12} \text{ Joules} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ Joules}$$

$$1/2 m v^2 = 1.6 \times 10^{-7} \text{ Joules}, \quad m = 2 \times 10^{-6} \text{ kg} \text{ therefore } v = 0.4 \text{ m/s} = 1.4 \text{ kph}$$

Teniendo en cuenta que [23]

$$c = 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{exact}), \quad (2.4)$$

podemos obtener la relación entre longitud y energía a partir de

$$\begin{aligned} \hbar c &= 1.054\,571\,68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} \times 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1} \\ &\approx 3.161\,526\,28 \times 10^{-26} \text{ J m} \\ &\approx 3.161\,526\,28 \times 10^{-26} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602\,176\,487 \times 10^{-10} \text{ J}} \text{ m} \\ &= 1.973\,269\,631(49) \times 10^{-16} \text{ GeV m}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Entonces  $\hbar c = 0.1973\,269\,631(49) \text{ GeV fm}$ .

### Example 2.1.0.2

Calcule la energía potencial de Coulomb para una par de protones (o electrones) separados una distancia  $l = \hbar c/\text{GeV} = 0.1973\,269\,631 \text{ fm}$

$$\begin{aligned} V &= \frac{ke^2}{l} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar c) \text{ GeV}^{-1}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Como  $V$  tiene unidades de energía, de la ec. (2.6) resulta entonces la constante adimensional conocida como la constante de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}, \quad (2.7)$$

que no puede tomar un valor numérico diferente sin importar el sistema de unidades que se use. De modo que no se puede tener un sistema de unidades que normalice todas las constantes físicas presentes en  $\alpha$ . Sólo 3 de las cuatro constantes  $e$ ,  $\hbar$ ,  $\epsilon_0$  y  $c$  pueden ser normalizadas, y la otra queda dependiendo del valor de  $\alpha$ .

El propósito de las unidades naturales es simplificar las expresiones algebraicas que aparecen en las leyes físicas.

El sistema de unidades naturales que usaremos es el de las Unidades de Planck Modificadas (MPU)

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1 \quad c = 1, \quad \epsilon_0 = 1, \quad k = 1, \quad (2.8)$$

de modo que

$$e = \sqrt{4\pi\alpha}, \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (2.9)$$

$6.582\ 118\ 99(16) \times 10^{-25} \text{ s}$	$\hbar \text{ GeV}^{-1}$
$1.973\ 269\ 631(49) \times 10^{-16} \text{ m}$	$\hbar c \text{ GeV}^{-1}$
1 kg	$5.609\ 589\ 12(42) \times 10^{26} \text{ GeV}/c^2$
1 K	$8.617\ 343(15) \times 10^{-14}/k \text{ GeV}$
$299\ 792\ 450 \text{ m s}^{-1}$	$c$
m kg	$2.842\ 278\ 859 \times 10^{-16} \hbar c^{-1}$

Tabla 2.1: MKS  $\leftrightarrow$  MPU

podemos obtener la relación entre el tiempo y la energía de

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\ 571\ 68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} = 6.582\ 118\ 99(16) \times 10^{-25} \text{ GeV s}, \quad (2.10)$$

Similarmente para la relación entre temperatura y energía, tenemos de la constante de Boltzman

$$k = 1.380\ 6504(24) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.617\ 343(15) \times 10^{-14} \text{ GeV K}^{-1}. \quad (2.11)$$

La relación ente masa y energía se puede obtener a partir de

$$G_N = 6.674\ 28(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} = 6.70881(65) \times 10^{-39} \hbar c (\text{GeV}/c^2)^{-2} \quad (2.12)$$

entonces<sup>1</sup>

$$M_p \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 1.2209 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2 = 2.1765 \times 10^{-8} \text{ kg} \quad (2.13)$$

y

$$G_N = \frac{\hbar c}{M_p^2}. \quad (2.14)$$

La energía de Planck es entonces  $M_p c^2$ , e igual a la masa en unidad naturales. Los factores de conversión del sistema MKS a MPU están dados en la Tabla 2.1 después de hacer  $\hbar = c = k = 1$

De los factores de conversión de la tabla vemos que masa $\times$ longitud tiene las mismas unidades que  $\hbar/c$ , de modo que podemos definir la longitud de Planck tal que

$$\begin{aligned} L_p M_p &\equiv \frac{\hbar}{c} \\ L_p &= \frac{\hbar}{c M_p} = \frac{\hbar}{c} \sqrt{\frac{G_N}{\hbar c}} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^3}} \\ &\approx 8.1907 \times 10^{-20} \frac{\hbar}{c \text{ GeV}} \approx 1.6163 \times 10^{-35} \text{ m} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Este análisis dimensional muestra que la longitud de Planck corresponde a una escala a la cual los efectos gravitacionales llegan a ser importantes, es decir, que la intensidad del potencial gravitacional es del orden de la masa de la partícula que lo genera<sup>2</sup>

$$V_{\text{gravity}} = G_N \frac{M_p^2}{L_p} = M_p c^2 \quad (2.16)$$

<sup>1</sup>o de una masa bien medida, por ejemplo  $m_p = 0.938\ 272\ 013(23) \text{ GeV}/c^2 = 1.672\ 621\ 637(83)^{-27} \text{ kg}$ .

<sup>2</sup>This is shown using dimensional analysis, much in the same way as the Bohr radius, beyond which the full quantum mechanical description of the Hydrogen atom cannot be neglected. Note that the Bohr radius was derived before a modern quantum mechanical treatment of Hydrogen became available. A similar statement can be made about the Planck length [22].

$M_p$	$\sqrt{\hbar c/G_N}$	$2.1765 \times 10^{-8} \text{ kg}$
$L_p$	$\sqrt{\hbar G_N/c^3}$	$1.6163 \times 10^{-35} \text{ m}$
$t_p$	$\sqrt{\hbar G_N/c^5}$	$5.3912 \times 10^{-44} \text{ s}$
$T_p$	$\sqrt{\hbar c^5/(G_N k^2)}$	$1.4168 \times 10^{32} \text{ K}$
$Q_p$	$e/\sqrt{\alpha}$	$1.8756 \times 10^{-18} \text{ C}$

Tabla 2.2: Unidades de Planck  $G_N = \hbar = c = \epsilon_0 = k = 1$ 

Finalmente, el tiempo de Planck es

$$t_p \equiv \frac{L_p}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G_N}{c^5}} \approx 8.1907 \times 10^{-20} \frac{\hbar}{c^2 \text{ GeV}} \approx 5.3912 \times 10^{-44} \text{ s}, \quad (2.17)$$

y la temperatura de Planck es

$$T_p \equiv \frac{M_p c^2}{k} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G_N k^2}} = 1.4168 \times 10^{32} \text{ K}. \quad (2.18)$$

Teniendo en cuenta la condición en (2.16), podemos también definir la carga de Planck tal que la intensidad de Potencial de Coulomb para dos masas de Planck separadas por la longitud de Planck sea igual a la energía de Planck

$$\begin{aligned} V_{\text{Coulomb}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_p^2}{L_p} = M_p c^2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_p^2}{\hbar/(c M_p)} &= M_p c^2 \\ \frac{Q_p^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} &= 1 \\ Q_p &= \frac{e}{\sqrt{\alpha}} \approx 1.8756 \times 10^{-18} \text{ C}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Entonces la constante de estructura fina puede pensarse como el cuadrado del cociente de la carga elemental a la carga de Planck

$$\alpha = \left( \frac{e}{Q_p} \right)^2. \quad (2.20)$$

Estos resultados están resumidos en la Tabla 2.2

### Example 2.1.0.3

Cálculo el potencial gravitacional para un par de protones separados una distancia  $L_{\text{proton}} = \hbar/(c m_{\text{proton}}) \approx 2.1 \times 10^{-16} \text{ m}$

$$V_{\text{gravity}} = G_N \frac{m_p^2}{L_{\text{proton}}} = G_N m_p^3 \frac{c}{\hbar} = \frac{G_N}{\hbar c} m_p^3 c^2 = \frac{m_p^2}{M_p^2} m_p c^2 \approx 10^{-38} m_p c^2 \quad (2.21)$$

En este caso la energía potencial gravitacional es mucho menor que la escala de energía correspondiente

**Example 2.1.0.4**

Compare la intensidad gravitacional con la Coulomb para un protón, y para una partícula de Planck.

Usando la ec. (2.14)

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{\text{gravity}}}{V_{\text{Coulomb}}} &= \frac{G_N m_X^2}{(1/4\pi\epsilon_0)e^2} \\
 &= (4\pi\epsilon_0 \hbar c / e^2) \frac{m_X^2}{M_p^2} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \left( \frac{m_X}{M_p} \right)^2 \\
 &\sim \begin{cases} 10^{-36} & m_X = m_{\text{proton}} \\ 10^2 & m_X = M_p \end{cases} \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

**Example 2.1.0.5**

De la constante de Fuerza electrostática  $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$ , podemos obtener el valor de la constante de estructura fina electromagnética  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0 \hbar c)$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{C}^{-2} \text{Nm}^2 = \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{C}^{-2} \text{Kg m}^3 \text{s}^{-2} \\
 &\approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{C}^{-2} \times 5.6096 \times 10^{26} \text{GeV} \times (5.068 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1})^3 \\
 &\quad \times (1.519 \times 10^{-24} \text{GeV}^{-1})^{-2} \times \frac{(\hbar c)^3 \hbar^{-2}}{c^2} \\
 &\approx 2.84 \times 10^{35} \text{C}^{-2} \hbar c \\
 &\approx 2.84 \times 10^{35} \text{C}^{-2} \times \left( \frac{1.602 \times 10^{-19}}{e^2} \right)^2 \hbar c \\
 &= \frac{7.296 \times 10^{-3}}{e^2} \hbar c
 \end{aligned}$$

Definimos la cantidad adimensional  $\alpha$ , como

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx 7.296 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

## 2.2. Notación relativista

Las transformaciones de Lorentz se definen como la transformaciones que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$a^2 = g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu \equiv a_\nu a^\nu = a^{0^2} - a^i a^i = a^{0^2} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (2.23)$$

donde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ,  $i = 1, 2, 3$  y se asume suma sobre índices repetidos. Además

$$a_\nu \equiv g_{\mu\nu} a^\mu \quad (2.24)$$

Finalmente la métrica usada se define como

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

donde  $\{g_{\mu\nu}\}$  denota la forma matricial del tensor  $g_{\mu\nu}$ .

El producto de dos cuadvectores se define en forma similar como

$$a_\nu b^\nu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.26)$$

El inverso de la métrica es

$$\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\} \quad (2.27)$$

tal que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad \text{and} \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad (2.28)$$

Bajo una transformación de Lorentz.

$$a^\mu \rightarrow a'^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu. \quad (2.29)$$

La invarianza del producto escalar en ec. (2.26)

$$a'^\mu b'_\mu = a^\mu b_\mu \quad (2.30)$$

da lugar a

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu \quad \text{or} \quad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_\mu^\alpha\}^T \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^\beta_\nu\}. \quad (2.31)$$

En notación matricial

$$g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (2.32)$$

Como un ejemplo de Transformación de Lorentz considere un desplazamiento a lo largo del eje  $x$

$$\{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{\Lambda^\mu_\nu\} \{x^\nu\}, \quad (2.33)$$

donde

$$\cosh \xi = \gamma \quad \sinh \xi = v\gamma, \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.34)$$

El  $\Lambda^\mu{}_\nu$  definido en la ec. (2.33) satisface la condición en ec. (2.31),

$$\begin{aligned}
\Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & -\cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi & \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & 0 & 0 \\ \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= g
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Denotaremos los cuadvectores con índices arriba como

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}) \tag{2.36}$$

Entonces el correspondiente cuadvector con índices abajo, usando la ec. (2.24), es

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) = (a^0, -\mathbf{a}). \tag{2.37}$$

Con esta notación, el producto escalar de cuadvectores puede expresarse como el producto escalar de los dos vectores de cuatro componente  $a^\mu$  y  $a_\mu$ .

### 2.2.1. Ejemplos de cuadvectores

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \tag{2.38}$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}) \tag{2.39}$$

De la relatividad especial tenemos que

$$\begin{aligned}
E &= \gamma m \\
\mathbf{p} &= \gamma m \mathbf{v}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Por lo tanto, ya que  $v^2 = \mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = \gamma^2 m^2 (1 - v^2) = m^2. \tag{2.41}$$

El invariante de Lorentz asociado a  $p^\mu$  corresponde a la ecuación de momento energía una vez se identifica la masa de una partícula con su cuadrivector

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \tag{2.42}$$

De [29]

The intuitive understanding of this equation is that the energy of a particle is partially due to its motion and partially due to the intrinsic energy of its mass. The application to particle detectors is that if you know the mass of a particular particle, or if its going so fast that its energy and momentum are both huge so that the mass can be roughly ignored, then knowing the energy tells you the momentum and vice versa

Para  $\mathbf{p} = 0$ , es decir cuando la partícula está en reposo se reduce a la famosa ecuación. Del electromagnetismo tenemos

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) = (\rho, \mathbf{J}) \quad (2.43)$$

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}) \quad (2.44)$$

Del cálculo vectorial

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (\partial_0, -\nabla) = (\partial^0, -\nabla) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0, \nabla) \quad (2.46)$$

Por consiguiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.47)$$

Producto escalar:

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a_\mu b^\nu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - a^i b^i = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.48)$$

Entonces

$$\partial_\mu a^\mu = \frac{\partial a^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (2.49)$$

La ecuación de continuidad  $\partial_\mu J^\mu = 0$  es un invariante de Lorentz. El operador cuadrático es, usando la ec. (2.23)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^0 \partial^0 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \quad (2.50)$$

Por consiguiente la ecuación de onda en ec. (1.153) es invariante de Lorentz

Los operadores de energía y momentum de la mecánica cuántica también forma un cuadrivector

$$\hat{p}^\mu = (\hat{p}^0, \hat{\mathbf{p}}) = (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (2.51)$$

con  $\hat{H}$ , y  $\hat{\mathbf{p}}$  dados en la ec. (1.105). Entonces

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i(\partial^0, \partial^i) = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad (2.52)$$

Del problema 1.3 se han definido las derivadas covariantes

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_0 &= \partial_0 + iqA_0 \\ \mathcal{D} &= \nabla - iq\mathbf{A}\end{aligned}\tag{2.53}$$

Podemos definir el cuadrivector

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}) \\ &= (\partial_0, \nabla) + iq(A_0, -\mathbf{A}) \\ &= (\partial_0, \partial_i) + iq(A_0, -A^i) \\ &= (\partial_0, \partial_i) + iq(A_0, A_i) \\ &= (\partial_0 + iqA_0, \partial_i + iA_i) \\ &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i) \\ &= (\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_i),\end{aligned}\tag{2.54}$$

donde hemos definido

$$\mathcal{D}_i = \partial_i + iqA_i.\tag{2.55}$$

Además  $A^\mu$  tiene la transformación gauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \qquad A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}\tag{2.56}$$

En notación de cuadrivectores

$$\begin{aligned}A^\mu \rightarrow A'^\mu &= \left( A^0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla\chi \right) \\ &= \left( A^0 - \frac{\partial\chi}{\partial t}, A^i + \partial_i\chi \right) \\ &= (A^0 - \partial^0\chi, A^i - \partial^i\chi) \\ &= (A^0, A^i) - (\partial^0\chi, \partial^i\chi) \\ A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu\chi.\end{aligned}\tag{2.57}$$

### Example 2.2.1.1

Calcule la fracción de la velocidad a la que puede ser acelerado un protón en el LHC Recuperando los factores de  $c$

$$E = \gamma mc^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{E^2}}$$

$m_p = 938.272013(23)\text{MeV}/c^2$ , and  $E = 7\text{TeV}$

$$v = 0.999999991 c$$

La longitud de un objeto esta definida tal que  $t' = 0$ , de modo que  $t = vx/c^2$ , entonces

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - v^2x/c^2) = \sqrt{1 - v^2/c^2}x. \quad (2.58)$$

Similarmente para la dilatación temporal  $x = 0$  y

$$t' = \gamma t. \quad (2.59)$$

Por lo tanto observamos al protón contraído en un factor de  $1 \times 10^{-8}$

### Example 2.2.1.2

La amplitud de decaimiento del muón es

$$\Gamma_\mu = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{m_\mu^5}{96\pi^3} I(x), \quad (2.60)$$

con  $x = m_e/m_\mu$ , e  $I(x) = 1 - 8x^2 - 24x^4 \ln(x) + 8x^6 - x^8$ . Entonces

$$\Gamma_\mu = 3.00867837568648 \times 10^{-19} \text{ GeV} \quad (2.61)$$

El tiempo de vida media del muón se define como

$$\begin{aligned} \tau_\mu &= \frac{1}{\Gamma_\mu} = 3.32371850737231 \times 10^{18} \text{ GeV}^{-1} \\ &= 3.32371850737231 \times 10^{18} \times 6.58211899 \times 10^{-25} \text{ s} \\ &= 2.19703(4) \times 10^{-6} \text{ s}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

La longitud de decaimiento se define como

$$L_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = c\tau_\mu \approx 658.65 \text{ m}. \quad (2.63)$$

El tiempo de vida media se refiere al tiempo de decaimiento para una partícula en reposo. Si  $v = 0.86c$ , entonces

$$\tau'_\mu = \gamma\tau_\mu = \frac{\tau_\mu}{\sqrt{1 - v^2}} \approx 4.31 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (2.64)$$

el doble de cuando está en reposo.

$$L'_\mu = c\tau'_\mu = 1290.74 \text{ m}. \quad (2.65)$$

A medida que el muón se acerca más a la velocidad de la luz,  $L'_\mu$  coincide más con la distancia recorrida por el muón antes de decaer. De hecho se estima que después de ser producidos en la atmósfera de rayos cósmicos, a la superficie de la Tierra llegan unos 10000 muones por metro cuadrado cada minuto [28].

### 2.2.2. Ecuaciones covariantes

Con el cuadrivector (2.52) podemos construir la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \phi &= m^2 \phi \\ i \partial_\mu i \partial^\mu \phi &= m^2 \phi \\ -\partial_\mu \partial^\mu \phi &= m^2 \phi \\ \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Que corresponde a la ecuación de Klein-Gordon (1.156). Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. El Lagrangiano covariante que da lugar a ésta ecuación es (ver ec. (1.153) (1.155)).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2.67)$$

El Lagrangiano más general posible para el campo  $\phi$  es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 + a\phi + b\phi^3. \quad (2.68)$$

Un término de la forma  $\partial_\mu \partial^\mu \phi$  puede reabsorberse en la ec. (2.68) como una derivada total. Un posible término  $J_\mu \partial^\mu \phi$ , con  $J_\mu$  constante, también puede reescribirse como una derivada total. Un término constante no afecta las ecuaciones de movimiento. Imponer la simetría  $\phi \rightarrow -\phi$  anula los dos últimos términos. Potencias de  $\phi$  mayores de cuatro daría lugar a una Teoría Cuántica de Campos no renormalizable.

La dimensión del campo  $\phi$  puede obtenerse usando que la acción es adimensional

$$[S] \supset \left[ \int d^4x m^2 \phi^2 \right] = E^{-4} E^2 [\phi]^2 \rightarrow [\phi] = E^1 \quad (2.69)$$

Diremos entonces que la dimensión de  $\phi$  es 1 (en unidades de energía). Similarmente

$$[S] \supset \left[ \int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right] = E^{-4} [\partial_\mu]^2 E^2 \rightarrow [\partial_\mu] = E^1 \quad (2.70)$$

Como era de esperarse debido a que la derivada tiene unidades de longitud inversa.

Si hacemos  $\lambda = a = b = 0$  en la ec. (2.68), y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.42), se obtiene

$$\begin{aligned} (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2) \phi &= 0 \\ (\hat{E}^2 - \hat{\mathbf{P}}^2 - m^2) \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$(\square + m^2) \phi = 0, \quad (2.72)$$

donde

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.73)$$

Es el D'Alembartiano [13]. Ec. (2.71) corresponde a la forma de operadores de la ecuación de energía-momentum relativista. La ec. (2.72) se conoce como la ecuación de Klein-Gordon, con Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \quad (2.74)$$

Una expresión escrita en términos de productos escalares de Lorentz se dice que esta en *forma covariante*. Por lo tanto la ecuación de Klein-Gordon y su correspondiente Lagrangiano están en forma covariante. También tienen la simetría  $\phi \rightarrow -\phi$ . A  $\phi$  se le denomina *campo escalar*.

Definiendo

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ G^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \end{aligned}$$

El Lagrangiano invariante de Lorentz para el cuadrivector  $A^\mu$  en ec. (2.44) es, hasta derivadas totales

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu + K_\nu A^\nu A_\mu A^\mu + \lambda A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu \\ & + a_1 \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + a_2 F^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + a_3 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (2.75)$$

La derivada covariante definida

## 2.3. Ecuaciones de Maxwell en notación covariante

Ecuaciones homogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.76)$$

Ecuaciones inhomogéneas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (2.77)$$

La primera ecuación establece la ausencia de cargas magnéticas, la segunda corresponde a la Ley de Faraday y la tercera a la Ley de Gauss. La cuarta sin el término de desplazamiento eléctrico introducido por Maxwell corresponde a la Ley de Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}. \quad (2.78)$$

Tomando la divergencia en esta expresión tenemos

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.79)$$

que corresponde a la ecuación de continuidad (1.54) para  $\rho$  constante

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.80)$$

De este modo la Ley de Ampère da lugar a la conservación de carga eléctrica pero solo a nivel global: una pérdida de carga eléctrica en un punto del universo puede ser compensada por la aparición instantánea de carga eléctrica en otro lugar del universo. La conservación global podría necesitar la propagación instantánea de señales, y esto está en conflicto con la relatividad especial.

Tomando la divergencia de la Ley de Ampère modificada por Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (2.81)$$

obtenemos la ecuación de continuidad (2.80). Dicha ecuación establece que la razón de decrecimiento de la carga en un volumen arbitrario  $V$  es debido precisa y únicamente al flujo de la corriente fuera de su superficie; de modo que la carga no puede ser creada ni destruida dentro de  $V$ . Ya que  $V$  puede ser arbitrariamente pequeño esto significa que la carga eléctrica debe conservarse localmente. El término extra introducido por Maxwell está motivado por un requerimiento de conservación local.

A la luz del teorema de Noether la conservación local de la carga eléctrica debe provenir de una transformación continua y *local* que deje invariante a las ecuaciones de Maxwell. Las invarianzas gauge de las ecuaciones de Maxwell juegan este papel. Las cargas conservadas localmente pueden determinarse a partir de la dinámica del sistema [21], además del uso de cargas conocidas que participen en alguna reacción. Por ejemplo se puede estudiar la forma como responde una partícula de carga desconocida a campos electromagnéticos para determinar su carga.

El principio gauge local, que pretendemos formular, va más allá del teorema de Noether estableciendo una relación entre las simetrías, las leyes de conservación y la dinámica. Este se constituye en el paradigma para estudiar las interacciones relevantes en física de partículas.

Para mostrar la invarianza gauge que exhiben las ecuaciones de Maxwell, es conveniente reescribirlas en forma covariante. Para ello es conveniente usar el potencial escalar eléctrico  $\phi$  y el potencial vectorial magnético  $\mathbf{A}$ .

Las siguientes ecuaciones son equivalentes a las ecuaciones homogéneas de Maxwell

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.82)$$

Ya que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\nabla \times \nabla\phi - \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Usando el cuadrivector en ec. (2.44) y expandiendo la ec. (2.82), tenemos

$$\begin{aligned} E^i &= -\left(\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{\partial A^i}{\partial x^0}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A^0}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_0}\right) \\ &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = i, \quad \nu = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$E^i = F^{i0} \quad (2.84)$$

donde hemos definido el Tensor de intensidad electromagnética como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2.85)$$

A  $A^\mu$  se le denomina *campo vectorial*. Similarmente

$$\begin{aligned} B^k &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ \epsilon_{lmk} B^k &= \epsilon_{lmk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= (\delta_{li} \delta_{mj} - \delta_{lj} \delta_{mi}) \frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial A^m}{\partial x^l} - \frac{\partial A^l}{\partial x^m} \\ &= \partial^m A^l - \partial^l A^m \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \mu = m, \quad \nu = l. \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\epsilon_{lmk} B^k = F^{ml} \quad (2.87)$$

Por consiguiente la ec. (2.85) es también equivalente a las dos ecuaciones homogéneas de Maxwell. En forma matricial,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 & \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 & \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 \\ \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 & 0 & \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 & \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 \\ \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 & \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 & 0 & \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 & \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 & \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & \epsilon_{213} B^3 & \epsilon_{312} B^2 \\ E^2 & \epsilon_{123} B^3 & 0 & \epsilon_{321} B^1 \\ E^3 & \epsilon_{132} B^2 & \epsilon_{231} B^1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

La ec. (2.85) satisface la identidad,

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0 \quad (2.89)$$

Definiendo el tensor dual como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma},$$

la ec. (2.89) puede escribirse como

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.90)$$

Para reescribir las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas en forma covariante usaremos además el cuadrivector  $J^\mu$  de la ec. (2.43). Usando la ec. (2.83), la primera ecuación de Maxwell inho-

	$\mathbf{E}, \mathbf{B}$	$A^\mu$	$F^{\mu\nu}$
Homogéneas	Ec. (2.76)	(2.82)	(2.85) ó (2.89) ó (2.90)
Inhomogéneas	(2.77)		(2.93)

Tabla 2.3: Ecuaciones de Maxwell

mogénea (2.77) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0 \\
 \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\
 \partial_i F^{i0} &= J^0 \\
 \partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0.
 \end{aligned}
 \tag{2.91}$$

Usando las ecs. (2.83), (2.86), la segunda ecuación de Maxwell inhomogénea (2.77) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
 -\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
 -\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\
 \partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\
 \partial_\mu F^{\mu k} &= J^k
 \end{aligned}
 \tag{2.92}$$

Las ecuaciones (2.91), (2.92) pueden escribirse en forma compacta como

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\
 &= \begin{cases} \partial_\mu(\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^i) = J^0 & \text{para } \nu = 0 \\ \partial_\mu(\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu) = J^i & \text{para } \nu = i \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{2.93}$$

Los resultados sobre la notación covariante de la ecuaciones de Maxwell están resumidos en la Tabla 2.3 De la parte izquierda de la ecuación (2.93), podemos ver que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Por consiguiente, la cuadricorriente  $J^\mu$  es conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = 0
 \tag{2.94}$$

### 2.3.1. Lagrangiano Electromagnético

La ec. (2.82) es invariante bajo las siguientes transformaciones

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi \qquad \phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}
 \tag{2.95}$$

Ya que

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}' = -\nabla\phi + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \mathbf{E} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A} + \underbrace{\nabla \times \nabla\chi}_{=0} = \mathbf{B} \quad (2.97)$$

Esto implica que diferentes observadores en diferentes puntos del espacio, usando diferentes calibraciones para sus medidas, obtienen los mismos campos. Las ecs. (2.95), corresponden a *transformaciones gauge locales*

En notación de cuadvectores

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= \left( \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, \mathbf{A} + \nabla\chi \right) \\ &= \left( \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}, A^i + \partial_i\chi \right) \\ &= (\phi - \partial^0\chi, A^i - \partial^i\chi) \\ &= (\phi, A^i) - (\partial^0\chi, \partial^i\chi) \\ A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu\chi \end{aligned} \quad (2.98)$$

Sea  $U$  un elemento del Grupo de Transformaciones  $U(1)$ :

$$U = e^{i\theta(x)} \in U(1) \quad (2.99)$$

El Grupo está definido por el conjunto infinito de elementos  $U_i = e^{i\theta(x_i)}$ . Entonces

- Producto de Grupo

$$U_1 \cdot U_2 = e^{i[\theta(x_1)+\theta(x_2)]} \equiv e^{i\theta(x_3)} \in U(1)$$

- Identidad:

$$\theta(x) = 0 \quad \text{tal que} \quad U_I = 1$$

- Inverso

$$\theta(-x) = -\theta(x) \quad \text{tal que} \quad U^{-1} = e^{-i\theta(x)}$$

Note que si

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{i}{e}(\partial^\mu U)U^{-1} \quad (2.100)$$

(Si  $\theta = \text{cte}$ ,  $A^\mu = A'^\mu$ , invarianza de fase). Si  $\theta$  es suficientemente pequeño

$$U = e^{i\theta(x)} \approx 1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad U^{-1} = e^{-i\theta(x)} \approx 1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.101)$$

Entonces

$$\begin{aligned} A'^\mu &= -\frac{1}{e}(i\partial^\mu\theta(x))[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] + A^\mu[1 + i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)][1 - i\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2)] \\ &= A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\theta(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (2.102)$$

Por consiguiente, si  $\chi(x) = -(1/e)\theta(x)$ , entonces la ec. (2.98) es la versión infinitesimal de la transformación  $U(1)$  en ec. (2.100). Del Teorema de Noether debe existir una carga conservada corresponde a la carga eléctrica, asociada la corriente  $J^\mu$ , de la cual aún no hemos especificado su origen.

Bajo esta transformación

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} &= (\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu) \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \chi - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \chi \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu \partial^\nu \chi + \partial^\mu \partial^\nu \chi \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.103)$$

De este modo las ecuaciones homogéneas de Maxwell (2.85) son invariantes gauge. Como la transformación gauge solo afecta al campo  $A^\mu$ , las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.93) también son invariantes gauge. De esta forma las ecuaciones de Maxwell corresponde a una Teoría Gauge!. Esto fue una curiosidad hasta los 1950.

Para ilustrar la relación entre la conservación local de la carga eléctrica y la transformación gauge, que no es una conexión simple, considere las ecuaciones de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.104)$$

que automáticamente incluyen la conservación local de carga, expresada por la ecuación de continuidad

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (2.105)$$

Además las ecuaciones de Maxwell permanecen invariantes bajo la transformación gauge

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi, \quad (2.106)$$

ya que dicha transformación deja invariante a  $F^{\mu\nu}$ . De aquí la sugerencia de la invarianza gauge esta relacionada de alguna manera a la conservación de la carga. De hecho la acción más general posible para el campo  $A^\mu$  compatible tanto con la invarianza de Lorentz y la invarianza gauge local corresponde a la acción que da lugar a las ecuaciones de Maxwell.

Si queremos que la Acción refleja las simetrías de las ecuaciones de Maxwell debemos mantener sólo los términos del Lagrangiano para  $A^\mu$  en (2.75) que sean invariantes hasta una derivada total. Bajo una transformación gauge, cada uno de los términos

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + K_\nu A^\nu A_\mu A^\mu + \lambda A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu + a_1 \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + a_2 F^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + a_3 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$$

dan lugar a un  $\delta\mathcal{L} \neq \partial_\mu(\text{algo})$  y la Acción no es invariante bajo la transformación gauge. Para los otros términos, usando la ec. (2.94), tenemos

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} = \partial^\mu (J_\mu \chi)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J^\mu A_\mu \quad (2.107)$$

es el más general que da lugar a una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local.

Con miras a calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange para el Lagrangiano en ec. (2.107), tenemos

$$\begin{aligned} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\rho A^\sigma \partial_\sigma A_\rho - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma + \partial^\sigma A^\rho \partial_\sigma A_\rho \\ &= g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\partial_\alpha A_\beta \partial_\rho A_\sigma - \partial_\alpha A_\beta \partial_\sigma A_\rho - \partial_\beta A_\alpha \partial_\rho A_\sigma + \partial_\beta A_\alpha \partial_\sigma A_\rho). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} (\delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \partial_\rho A_\sigma + \partial_\alpha A_\beta \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} \partial_\sigma A_\rho - \partial_\alpha A_\beta \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu} \\ &\quad - \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\rho A_\sigma - \partial_\beta A_\alpha \delta_{\rho\mu} \delta_{\sigma\nu} + \delta_{\beta\mu} \delta_{\alpha\nu} \partial_\sigma A_\rho + \partial_\beta A_\alpha \delta_{\sigma\mu} \delta_{\rho\nu}). \\ &= g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\rho A_\sigma + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\alpha A_\beta - g^{\rho\mu} g^{\sigma\nu} \partial_\sigma A_\rho - g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\alpha A_\beta \\ &\quad - g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\rho A_\sigma - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \partial_\beta A_\alpha + g^{\rho\nu} g^{\sigma\mu} \partial_\sigma A_\rho + g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} \partial_\beta A_\alpha \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu \\ &= 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 4F^{\mu\nu} \tag{2.108}$$

Usando la ec. (2.108), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\ -\frac{1}{4} \partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right] + J^\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\ -\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\rho \delta_{\rho\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Como era de esperarse una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local, expresada en términos del Lagrangiano (2.107), da lugar a la Teoría Electromagnética.

De este modo las ecuaciones de Maxwell se pueden derivar del requerimiento de que la teoría, además de ser invariante de Lorentz, pueda expresarse en términos de potenciales de una forma que sea invariante gauge en esos potenciales. Si un cuadrivector potencial  $A^\mu$  es postulado, y se impone que la teoría involucre este solamente, de una forma que sea insensible a cambios de la forma (2.98), se es conducido naturalmente a la idea de que los campos físicos entran únicamente vía la cantidad  $F^{\mu\nu}$ , que es invariante bajo la ec. (2.98). De aquí se puede conjeturar la ecuación de campo en base a la covarianza de Lorentz.

Esto no corresponde ciertamente a una prueba de las ecuaciones de Maxwell. A pesar de eso, la idea que la dinámica (en este caso la completa interconexión entre los efectos eléctricos y magnéticos) pueda estar íntimamente relacionada a un requerimiento de invarianza local se ha convertido en algo muy fructífero.

En términos de transformaciones globales, se puede mostrar [21] que el cambio por una constante del potencial escalar ( $\chi = at$ ,  $A_0 \rightarrow A'_0 = A_0 - a$ ,  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A}$  en ec.(2.95)), más la conservación de energía, da lugar a la conservación local de la carga. La conservación local en este contexto requiere que el cambio por una función del potencial escalar en en (2.95) sea compensado por el correspondiente cambio en el vector potencial magnético  $A$ . En general, cuando una cierta invarianza

global es generalizada a una local, se requiere la existencia de un nuevo campo que compensa, interactuando de una manera específica. Las teorías que dan lugar al Modelo Estándar y que describen las interacciones fuertes, débiles y electromagnéticas, son ejemplos de teorías dinámicas derivadas desde un requerimiento de invarianza local.

Una de las principales razones de porque la física de partículas se formula en términos de lagrangianos, es que  $\mathcal{L}$  debe ser escalar en cada espacio relevante, e invariante bajo las transformaciones (hasta derivadas totales), ya que la acción es invariante. Haciendo el Lagrangiano covariante de Lorentz por ejemplo, garantiza que todas las predicciones son invariantes de Lorentz.

### 2.3.2. Energía del campo electromagnético

Necesitamos la expresión para  $F_{\mu\nu}$ ,

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}F^{\rho\eta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = F_{0\nu} = g_{00}g_{ij}F^{0j} = -F^{0i} & \text{para } \mu = 0 \\ F_{ij} = F_{i\nu} = g_{ik}g_{jl}F^{kl} = F^{ij} & \text{para } \mu = i \end{cases} \quad (2.110)$$

De la ec. (1.70), se tiene

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\lambda})}(\partial_{\nu}A_{\lambda}) - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L} \\ &= -F^{\mu\lambda}(\partial_{\nu}A_{\lambda}) - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.111)$$

La energía del campo, corresponde a la componente  $T_0^0$ :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0A_{\lambda}) - \mathcal{L} \\ &= -F^{0\lambda}(\partial_0A_{\lambda}) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^{\mu}A_{\mu} \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (2.84), (2.87), (2.110)

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0A_{\lambda}) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^{\mu}A_{\mu} \\ &= -F^{0\mu}(\partial_0A_{\mu}) + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu 0}F_{\mu 0}}^{\nu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu i}F_{\mu i}}^{\nu=i} + J^{\mu}A_{\mu} \\ &= -F^{0\mu}\partial_{\mu}A_0 - F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} + J^{\mu}A_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Tenemos dos partes

$$\begin{aligned} -F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} &= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{0i}F_{0i}}^{\mu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{ji}F_{ji}}^{\mu=j} \\ &= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} \\ &= -\frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Además

$$\begin{aligned}
-F^{0\mu}\partial_\mu A_0 + J^\mu A_\mu &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) + A_0\partial_\mu F^{0\mu} + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) - A_0\partial_\mu F^{\mu 0} + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) - A_0 J^0 + J^\mu A_\mu \\
&= -\partial_i(A_0 F^{0i}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) - \frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\
&= -\partial_i(A_0 F^{0i}) + \frac{1}{2}F^{i0}F^{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F^{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\
&= \frac{1}{2}E^i E^i + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}B^k \epsilon_{ijl}B^l + \partial_i(A_0 E^i) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\delta_{kl}B^k B^l + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Entonces, en ausencia de corrientes

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}). \tag{2.116}$$

Similarmente la densidad Lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \tag{2.117}$$

En vista a la ec. (2.112), ya que la densidad Lagrangiana está definida hasta una derivada total, como  $\nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) = \partial_\mu(A_0 F^{\mu 0})$ , la densidad Hamiltoniana también estará definida hasta una derivada total. De hecho, el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) \\
&= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2),
\end{aligned} \tag{2.118}$$

y corresponde a la expresión conocida para la energía del campo electromagnético. Hemos usado el hecho que en ausencia de corrientes todo lo que entra a un volumen debe salir y por consiguiente las integrales sobre el volumen de la divergencia de cualquier vector es cero.

Similarmente el momentum total del campo, en ausencia de corrientes, corresponde al vector de

Pointing:

$$\begin{aligned}
T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} \partial_i A_\nu \\
&= -F^{0\nu} \partial_i A_\nu \\
&= -F^{0j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) - F^{0j} \partial_j A_i \\
&= -F^{0j} F_{ij} - F^{0j} \partial_j A_i \\
&= -F^{0j} F^{ij} - \partial_j (F^{0j} A_i) + (\partial_j F^{0j}) A_i \\
&= E^j \epsilon_{jik} B^k + \partial_j (E^j A_i) + (J^0) A_i \\
&= -(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i - \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) - \rho A^i
\end{aligned} \tag{2.119}$$

En ausencia de cargas y corrientes

$$\begin{aligned}
P^i &= - \int_V d^3x T_i^0 = \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) \\
\mathbf{P} &= \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B}).
\end{aligned} \tag{2.120}$$

### 2.3.3. Fijación del gauge

Para obtener una solución definitiva a las ecuaciones del campo electromagnético, se debe remover la arbitrariedad asociada con la libertad gauge de la ec. (2.98). De este modo los campos quedan especificados unívocamente en todas partes. De hecho, de las cuatro componentes del campo  $A^\mu$ , solo dos son independientes y corresponden a los estados de polarización de las ondas electromagnéticas [11] (Capítulo 2). A éste proceso se le denomina fijar el gauge, y consiste en imponer restricciones sobre los campos que fijan la función  $\chi$  y remueven la libertad gauge.

Nosotros usaremos el Gauge de Lorentz, definido por la condición

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \tag{2.121}$$

Si inicialmente  $\partial_\mu A^\mu \neq 0$ , se realiza una transformación gauge tal que  $\partial_\mu A'^\mu = 0$ . De acuerdo a la ec. (2.98), esto da lugar a la ecuación de onda inhomogénea

$$\square \chi = \partial_\mu A^\mu$$

que puede solucionarse mediante las técnicas usuales.

Es importante resaltar que la física queda inafectada por la escogencia del gauge. El resultado final para cualquier observable físico debe ser independiente del gauge usado para calcularlo.

Las ecuaciones de Maxwell (2.93) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\
\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu \\
\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= J^\nu \\
\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= J^\nu.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

Aplicamos ahora el gauge de Lorentz, ec. (2.121) a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (2.122)

$$\square A^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu. \quad (2.123)$$

De este modo, cada componente del campo  $A^\mu$  satisface la ecuación de onda (2.66), o la ecuación de Klein-Gordon (2.72) para masa cero. En ausencia de corrientes el campo  $A^\mu$  puede ser expandido en ondas planas con dos grados independientes de polarización [11], de forma similar a como se hizo en la sección 1.5 para el campo  $\phi$ . Una vez cuantizada la teoría,  $A^\mu$  corresponde al fotón, y solo queda con dos grados de libertad independientes que corresponden a los modos transversales de la onda electromagnética [11] (capítulo 2).

La ec. (2.107), with  $J^\mu = 0$ , en el Gauge de Lorentz puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} [\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) + A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\nu (A^\mu \partial_\mu A_\nu) + \underbrace{A^\mu \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu)}_{\mu \leftrightarrow \nu}] \\ &= -\frac{1}{4} [2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (2A^\nu \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu \end{aligned} \quad (2.124)$$

Incluyendo el término con corrientes, y usando el hecho de que un signo global no afecta las ecuaciones de movimiento, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + J_\mu A^\mu \quad (2.125)$$

## 2.4. Ecuaciones de Proca

Consideraremos ahora el efecto de adicionar un término de masa a la teoría de Maxwell. Los campos vectoriales masivos juegan un papel importante en física. Campos como  $W^\mu$ ,  $Z^\mu$  que median las interacciones débiles son ejemplos de campos de este tipo. Las implicaciones de una masa finita para el fotón pueden inferirse de un conjunto de postulados que hacen de las ecuaciones de Proca la única generalización posible de las ecuaciones de Maxwell [14].

Teniendo en cuenta sólo el término de masa en la ec. (2.107)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu. \quad (2.126)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left( \frac{1}{2} m^2 A^\rho A_\rho - J^\rho A_\rho \right) &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu &= J^\nu. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Tomando la cuatridivergencia a ambos lados de la ecuación y usando la ec. (2.122), tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\ \partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\ m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu\end{aligned}\tag{2.128}$$

De este modo, en ausencia de corrientes, las ecuaciones de Proca dan lugar a la condición de Lorentz. De otro lado, si asumimos que la corriente se conserva, la condición de Lorentz también aparece. Por consiguiente, si la masa de campo vectorial es diferente de cero, la condición de Lorentz, ec. (2.121), emerge como una restricción adicional que debe ser siempre tomada en cuenta. De este modo la libertad gauge de las ecuaciones de Maxwell se pierde completamente en las ecuaciones de Proca, que sin pérdida de generalidad se pueden reescribir, usando  $\partial_\mu A^\mu = 0$  y las ecs. (2.122), (2.127), como:

$$(\square + m^2)A^\nu = J^\nu\tag{2.129}$$

En ausencia de corrientes, cada una de las componentes del campo vectorial satisface la ecuación de Klein-Gordon (2.72). Por consiguiente  $m$  corresponde a la masa del campo vectorial  $A^\mu$ .

Aplicando la condición de Lorentz a la ec. (2.126), obtenemos el Lagrangiano de la Ecuación de Proca (2.129)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu A^\nu \partial_\mu A^\nu - \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu + J^\nu A_\nu,\tag{2.130}$$

donde hemos reabsorbido un signo global que no afecta las ecuaciones de movimiento. El primer término que incluye sólo derivadas de los campos es llamado *término cinético* y dependen sólo del espín de las partículas. El término cuadrático en los campos corresponde al *término de masa*, y el último corresponde a la interacción del campo con una corriente. Cuando un Lagrangiano contiene sólo términos cinéticos y de masa diremos que el campo que da lugar al Lagrangiano es libre de interacciones, o simplemente que es un *campo libre*. Las otras partes del Lagrangiano serán llamadas *Lagrangiano de Interacción*. De este modo podemos reescribir el Lagrangiano (2.130) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2} \partial_\mu A^\nu \partial_\mu A^\nu - \frac{1}{2} m^2 A^\nu A_\nu \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= J^\nu A_\nu.\end{aligned}\tag{2.131}$$

Debido a que la teoría masiva ya no es invariante gauge, la condición de Lorentz aparece automáticamente como la única restricción apropiada sobre el campo vectorial.

Una vez se toma en cuenta la condición de Lorentz el campo masivo libre puede expandirse en ondas planas con tres grados de libertad independientes de polarización. Dos de estos corresponden a los dos estados transversos que aparecen en las ondas electromagnéticas ( $A^1$ ,  $A^2$ ), y el tercero ( $A^3$ ) corresponde a un estado longitudinal en la dirección del momento de la partícula [11].

Aunque hemos hecho el análisis de la ecuación de Proca permitiendo un término de masa para el fotón, las implicaciones experimentales de una teoría de este tipo dan lugar a restricciones muy fuertes sobre la masa del fotón [14]. El límite actual sobre la masa del fotón es  $m < 6 \times 10^{-17}$  eV ( $1.1 \times 10^{-52}$  Kg) [15]. Debido al principio gauge local, desde el punto teórico se espera que la masa del fotón sea exactamente cero. En general, los campos vectoriales pueden ser generados a partir de otras cargas no electromagnéticas y pueden ser masivos. El reto durante varias décadas fue entender como la masa de los campos vectoriales de la interacción débil podría hacerse compatible con el principio gauge local.

## 2.5. Problemas

2.1 Muestre que

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\rho = \delta_\nu^\rho$$

Compruebe esta identidad para la transformación de Lorentz de la ec. (2.33)

2.2 Muestre que el Lagrangiano electromagnético en ausencia de corrientes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (2.132)$$

2.3 Calcule el rango de la interacción débil mediada por la partícula  $W^-$  de masa

$$m_W \approx 80 \text{ GeV} \quad (2.133)$$

# Capítulo 3

## Principio Gauge Local

### 3.1. Ecuación de klein-Gordon

La interacción entre un protón y un neutrón fue determinada experimentalmente por Tomonaga en 1934 [?]

$$V(r) = A \frac{e^{-r/\Lambda}}{r}, \quad (3.1)$$

con

$$\Lambda \approx 1/(7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}) = 1.43 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (3.2)$$

Consideremos el principio de incertidumbre

$$\begin{aligned} \Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta t \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La segunda relación de incertidumbre aplicada a la teoría de Yukawa [21], brinda un nuevo entendimiento de la relación entre el rango y la masa en ec. (3.1).  $\Delta t$  es el tiempo que el sistema cuántico interactúa con el aparato de medida y  $\Delta E = \hbar/(2\Delta t)$  es el error mínimo que se obtiene en la medida de la energía, tal que  $E = E_0 \pm \Delta E$ . Es decir, para medir la energía con una precisión  $\Delta E$ , uno necesita un tiempo mayor que  $\hbar/(2\Delta E)$ .

Si  $\Delta E < mc^2$  eso quiere decir que podemos medir la cantidad  $mc^2$  con alguna certeza. Es decir que una partícula de masa  $m$  se puede llegar a observar. Si  $\Delta E > mc^2$  entonces una partícula de masa  $m$  puede existir durante un tiempo  $\Delta t$ . A tal partícula se le llama virtual porque no es observable.

El momentum de una partícula de número de onda  $k$  es  $p = \hbar k$ , de modo que la incertidumbre en el momentum para una partícula relativista es

$$\Delta p = \hbar \Delta k \approx \hbar \frac{\Delta \omega}{c} = \frac{\Delta E}{c} \quad (3.4)$$

Si la masa de la partícula es cero entonces  $E$  puede tender a cero, que corresponde al caso de un partícula no masiva con un momentum tendiendo a cero. La cantidad por la cual la conservación de energía es violada,  $\Delta E$ , también puede llegar a ser muy pequeña. De modo que un fotón virtual

de frecuencia muy baja puede existir durante un tiempo casi infinito. Durante ese tiempo un fotón viajando a la velocidad de la luz podría viajar una distancia casi infinita y puede dar cuenta de una interacción de rango infinito.

Sin embargo, para una partícula de masa  $m$ . La violación de energía para producir esta debe ser de al menos  $mc^2$ , o  $\Delta E > mc^2$ . Por el principio de incertidumbre la máxima distancia que puede recorrer es  $\Lambda = c\Delta t$

$$\begin{aligned}\Lambda &\geq \frac{\hbar c}{2\Delta E} \\ &\geq \frac{c\hbar}{2mc^2} \\ &\geq \frac{\hbar}{2mc} \\ &\geq \frac{1}{2m} \quad \text{Natural Units.}\end{aligned}\tag{3.5}$$

De la componente escalar de la ecuación de Proca, (2.130), obtenemos la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar real  $\phi = A^0$ ,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \rho\phi\tag{3.6}$$

Donde  $\rho$  es la densidad de carga que actúa como fuente del campo  $\phi$ .

Posteriormente discutiremos en detalles porque  $m$  corresponde a la masa de la partícula. La idea básica es que  $\phi$  tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial  $V = (1/2)m^2\phi^2$  que corresponde a la energía de un oscilador armónico. Esta energía es equivalente a masa. Note que  $m^2 < 0$  no puede interpretarse como masa. En este caso  $\phi$  describirá excitaciones alrededor de la parte plana del potencial. Como estas excitaciones no cuestan energía, corresponde a una partícula sin masa.

El campo  $\phi$  puede pensarse como proveniente de una fuente de la misma manera como el campo electromagnético surge de partículas cargadas. Como en el caso del electromagnetismo, en esta sección podemos considerar los campos sin preocuparnos de las fuentes. En tal caso tendremos una teoría en la cual el campo escalar juega el papel de partícula mediadora de la interacción.

Si el campo escalar se generaliza para que pueda tener otros números cuánticos, como carga eléctrica, entonces estos pueden ser las fuentes de las respectivas cargas y corrientes en las ecuaciones para campos vectoriales. Esto se estudiará en la sección 3.2. En tal caso podríamos tener por ejemplo “átomos” formados de partículas escalares que se excitan emitiendo fotones.

En las secciones 2.2.2 y 2.4, hemos visto que el Lagrangiano en ec. (3.6) da lugar a las ecuaciones de Klein-Gordon en presencia de una densidad de carga

$$(\square + m^2)\phi = \rho\tag{3.7}$$

De acuerdo a la ec. (2.131), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \rho\phi\end{aligned}\tag{3.8}$$

En analogía con el electromagnetismo donde las densidades de carga y corrientes son la fuente del campo  $A^\mu$ , podemos pensar en  $\rho$  como la fuente del campo  $\phi$ . En el caso del electromagnetismo el

análisis de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, ec. (2.93), para las componentes  $A^0$  y  $J^0$ , en el gauge de Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (3.9)$$

da lugar a la Ley de Coulomb, que corresponde a una interacción de rango infinito [11]. Veremos a continuación que un análisis similar para un campo escalar masivo (o para la componente cero de un campo vectorial masivo) da lugar a una interacción de corto rango.

Consideremos el caso más simple de una fuente puntual para el campo  $\phi$ :

$$\rho(x) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (3.10)$$

donde  $g$  es una constante. Entonces  $\rho$  es independiente del tiempo y genera un campo (un potencial) independiente del tiempo. Entonces, como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

tenemos

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (3.11)$$

Para resolver la ecuación diferencial es más conveniente transformar  $\phi(\mathbf{x})$  al espacio de momentos. Su transformada de Fourier es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}). \quad (3.12)$$

La transformada inversa es

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}). \quad (3.13)$$

Además tenemos la propiedad

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (3.14)$$

Reemplazando ec. (3.12) en (3.11), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{k}^2 + m^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= g\delta(\mathbf{x}) \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ (\mathbf{k}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \frac{g}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (3.15)$$

Reemplazando en la ec. (3.12) y definiendo  $r \equiv |\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[ \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right] \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} 2\pi \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_0^\pi e^{i|\mathbf{k}|r \cos \theta} \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $u = \cos \theta$ ,  $du = -\sin \theta d\theta$ ,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_1^{-1} e^{i|\mathbf{k}|ru} du, \\ \phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{(2\pi)^2} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| \frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2 + m^2} \int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|ru} du.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Ya que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{k}|ru} du &= \frac{e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}}{i|\mathbf{k}|r} \\ \phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r} - e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \left( \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right) \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \left( \int_0^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} - \underbrace{\int_0^{-\infty} d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2}}_{|\mathbf{k}| \rightarrow -|\mathbf{k}|} \right) \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| |\mathbf{k}| \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= \frac{g}{i(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}| \frac{|\mathbf{k}| e^{i|\mathbf{k}|r}}{(|\mathbf{k}| + im)(|\mathbf{k}| - im)}\end{aligned}\quad (3.17)$$

Definiendo

$$f(z) = \frac{ze^{izr}}{z + im}$$

y usando la integral de Cauchy para el contorno correspondiente al semiplano positivo que incluye el polo en  $z = im$

$$\int_C \frac{f(z)}{z - im} dz = 2\pi i f(im) = 2\pi i \frac{im e^{-mr}}{2im} = \pi i e^{-mr}\quad (3.18)$$

tenemos que

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}\quad (3.19)$$

A la luz de la interacción fuerte, un protón y un neutrón son indistinguibles y son llamados nucleones. En primera aproximación la interacción fuerte puede ser tratada como una interacción de Yukawa en el rango de los fermis entre los nucleones, mediada por mesones, como el pión. Ver sec. 2.2 de [21].

Para ver esto considere un nucleón como fuente de un mesón intermediario. De acuerdo a la

ec. (3.19),

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' g \delta(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L}_{\text{int}} \\
&= -\mathcal{L}_{\text{int}} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{3.23}$$

El Hamiltoniano de interacción en ec. (3.23) representa la interacción entre dos nucleones mediante el intercambio de un mesón. En forma análoga a como dos electrones intercambian un fotón mediante la interacción electromagnética. En el caso de  $m = 0$ ,  $H_{\text{int}}$ , corresponde a la de energía potencial de Coulomb. El potencial por unidad de carga al cuadrado, puede escribirse como

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{3.24}$$

El potencial en (3.24) recibe el nombre de *potencial de Yukawa* y corresponde a una interacción de rango  $r \sim 1/m$ .

Comparando con la ec. (3.1) tenemos

$$m \approx \frac{1}{\Lambda} \tag{3.25}$$

que es compatible con la ec. (3.5). Usando el valor medido de  $\Lambda$  en la ec. (3.2)

$$\begin{aligned}
m &\approx \frac{1}{1.43 \times 10^{-15} \text{m}} \frac{1.973 \times 10^{-16} \text{m}}{\text{GeV}^{-1}} \\
&\approx 138 \text{ MeV}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

La masa del pión  $\pi^0$ , es  $m_{\pi^0} = 134.8766(6) \text{ MeV}$ .

En el caso general tenemos que  $\phi(x)$  satisface la ecuación de Klein-Gordon en el espacio libre, ec. (3.7)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0 \tag{3.27}$$

con solución,

$$\phi \propto \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t) \quad (3.28)$$

que, consistente con la discusión en la sección 2.2, ec.(2.71), da lugar a la condición

$$m^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2. \quad (3.29)$$

De este modo  $m$ , puede interpretarse como la masa de la partícula  $\phi$ .

Para complementar la discusión, condere el caso de un aparato de medida con el mínimo requerimiento para descubrir el  $\pi^0$ . El tiempo que el  $\pi^0$  tarda en cruzar del protón al nucleón debe ser al menos de  $r/c$ . El aparato de medida debe operar a una escala de tiempos

$$\Delta t < \frac{r}{c}. \quad (3.30)$$

La incertidumbre en la energía será

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} = \frac{\hbar c}{2r}. \quad (3.31)$$

Reemplazando  $\Delta E = \frac{1}{2}mc^2$  para que la medida  $E \pm \Delta E$  sea significativa a dos  $\sigma$ , tenemos que

$$r \geq \frac{\hbar}{mc}. \quad (3.32)$$

De este modo  $r$  es la medida de la separación entre  $n$  y  $p$ , tal que en el tiempo disponible, el  $\pi^0$  pueda robar la energía necesaria para llegar a existir y cruzar de uno a otro. Usando  $m = 138$  MeV, tenemos

$$r \geq \frac{1}{0.138} \text{ GeV}^{-1} \times \frac{1.973 \times 10^{-16} \text{ m}}{\text{GeV}^{-1}} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (3.33)$$

El valor obtenido de  $\Lambda$  es compatible con  $r$ .  $\Lambda$  es el rango efectivo de la fuerza asociada. A continuación Yukawa considero la posibilidad de que el quantum  $\phi$  pudiera ser emitido en la transición  $n \rightarrow p$ , a través del proceso

$$n \rightarrow p + \phi^- \quad (3.34)$$

donde la conservación de la carga determina la carga de  $\phi^-$ . Sin embargo el proceso viola la conservación de la energía ya que  $m_n = 939.565 \text{ 56(81) MeV}$ ,  $m_p = 938.272 \text{ 013(23) MeV}$ , de modo que  $m_n < m_p + m_\phi$ , si  $m_\phi \sim 100$  MeV, así esto no puede ocurrir como un proceso real de emisión. Sin embargo, Yukawa notó que si (3.34) se combina con el proceso inverso

$$p + \phi^- \rightarrow n \quad (3.35)$$

entonces una interacción  $n$ - $p$  podría tomar lugar a través del mecanismo mostrado en la figura 3.1(a). Es decir a través del intercambio de un quantum  $\phi^-$ . El otro diagrama compatible con la conservación de la carga también aparece en la figura

En el espacio de momentos, la cantidad relevante que representa el intercambio de piones, es la que aparece en la ec. (3.17) y se conoce como el *propagador*:

$$\text{propagador: } \frac{1}{\mathbf{k}^2 - m^2} \quad (3.36)$$

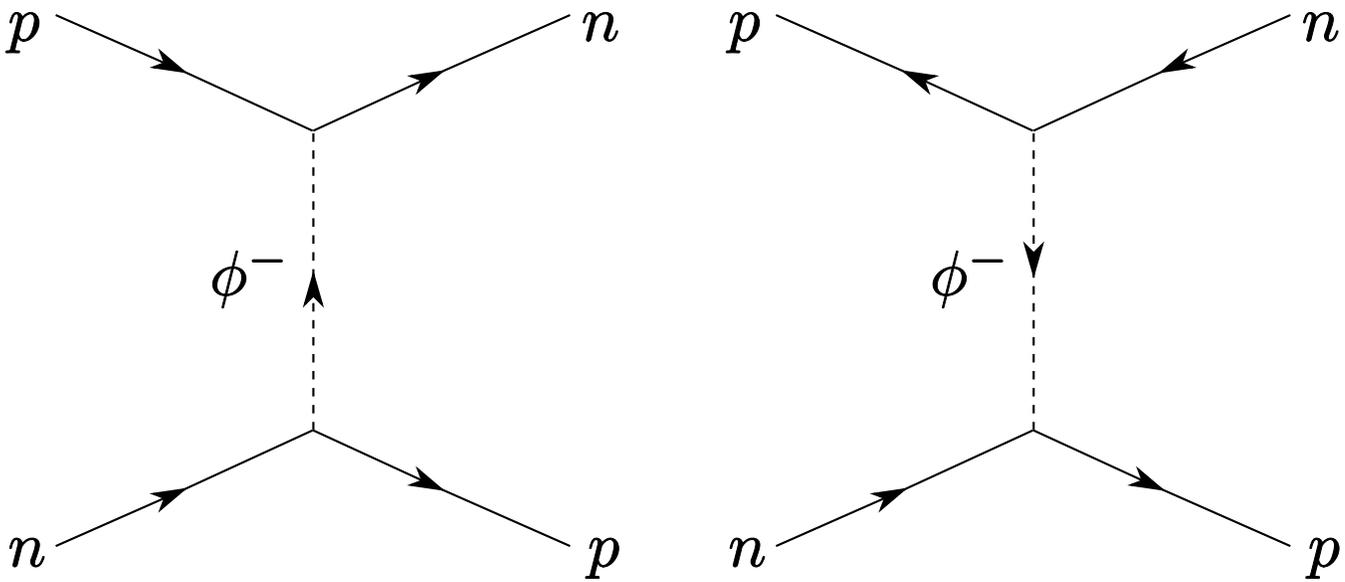


Figura 3.1: Intercambio de Yukawa de un sólo  $\phi$

En el caso electromagnético tendremos simplemente

$$1/k^2. \tag{3.37}$$

Para partículas  $\alpha$  incidiendo sobre un metal y siendo dispersadas por un ángulo  $\theta$  entre  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{q}'$ , tal que se satisface la condición de dispersión elástica  $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2$  (dispersión de Rutherford)

$$\mathbf{k}^2 = (\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 = 2\mathbf{q}^2(1 - \cos \theta) = 4\mathbf{q}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{3.38}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{cross section} &\propto \frac{1}{\mathbf{k}^2} \\ &\propto \sin^{-4} \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

que explica la famosa variación angular de la dispersión de Rutherford, en la cual las partículas  $\alpha$  son dispersadas por los núcleos positivamente cargados del metal. Ver figura 3.2

En general tendremos

$$\text{propagador: } \frac{1}{k^2 - m^2}, \tag{3.40}$$

donde  $k = (k_0, \mathbf{k})$

### 3.2. Campos escalares complejos

En la sección anterior se trabajó con un campo escalar real que sólo podría describir un pion neutro. Para describir piones cargados debemos construir un campo escalar complejo. En mecánica cuántica la función de onda compleja puede describir parcialmente a un electrón cargado. Sin embargo

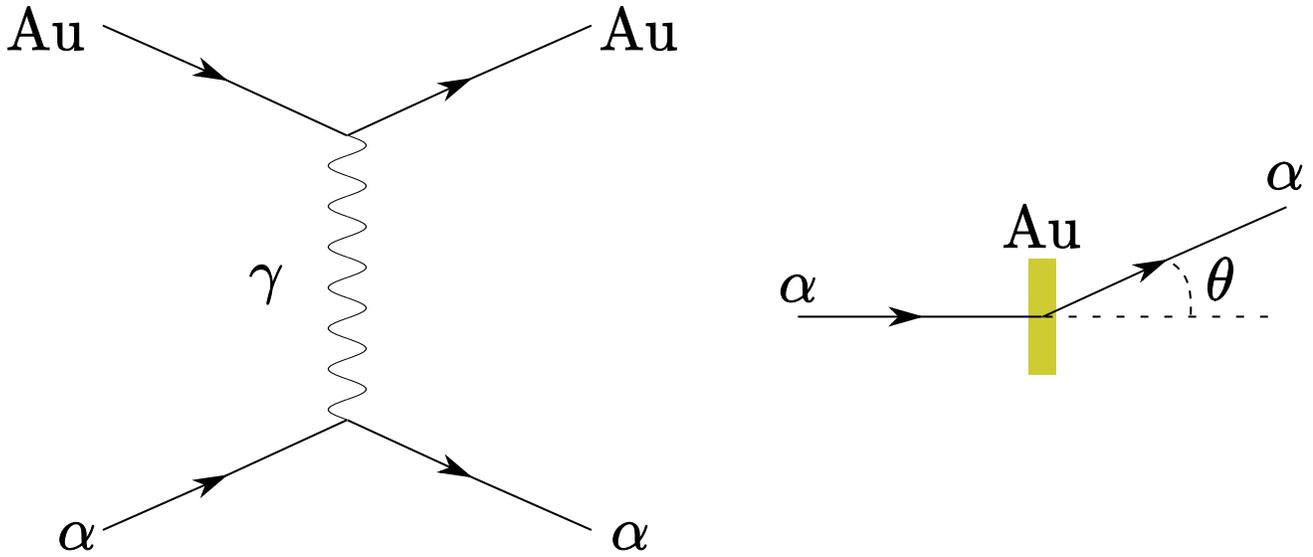


Figura 3.2: Dispersión de partículas  $\alpha$  a través de una lámina de oro

la función de onda del electrón también debe ser generalizada para poder dar cuenta del espín. Esto corresponde a la función de onda de la ecuación de Dirac en la sección 5.1.

De hecho, algunas consecuencias físicas interesantes surgen si consideramos un sistema de dos campos escalares reales,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , que tengan la misma masa  $m$ . Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2}m^2 \phi_1^2] + \frac{1}{2}[\partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_2^2] \quad (3.41)$$

Si definimos

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \text{then} \quad (3.42)$$

$$\phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad \text{and} \quad (3.43)$$

$$\sqrt{2}\phi = (\phi_1 + i\phi_2)$$

$$\sqrt{2}\phi^* = (\phi_1 - i\phi_2). \quad \text{Therefore}$$

$$\sqrt{2}(\phi + \phi^*) = 2\phi_1$$

$$\sqrt{2}(\phi - \phi^*) = 2i\phi_2. \quad \text{Then}$$

$$\phi_1 = \frac{\phi + \phi^*}{\sqrt{2}} \quad (3.44)$$

$$\phi_2 = \frac{\phi - \phi^*}{\sqrt{2}i}. \quad (3.45)$$

Reemplazando la ecuaciones (3.44) y (3.45) en la ec. (3.41), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{4}[\partial^\mu(\phi + \phi^*)\partial_\mu(\phi + \phi^*) - \frac{1}{2}m^2(\phi + \phi^*)^2] \\
&\quad + i^2\frac{1}{4}[\partial^\mu(\phi - \phi^*)\partial_\mu(\phi - \phi^*) - \frac{1}{2}m^2(\phi - \phi^*)^2] \\
&= \frac{1}{4}[\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi^* + 2\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2(\phi^2 + \phi^{*2}) + 2\phi^*\phi] \\
&\quad - \frac{1}{4}[\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi + \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi^* - 2\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2(\phi^2 + \phi^{*2}) - 2\phi^*\phi] \\
&= \frac{1}{4}[4\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - 4m^2\phi^*\phi] \\
\mathcal{L} &= \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi
\end{aligned} \tag{3.46}$$

De la ec. (1.51) de la sección 1.3,

De las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\phi^*$ , usando el Lagrangiano en ec. (3.46)

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= 0 \\
\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi &= 0 \\
(\square + m^2)\phi &= 0,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

y de la ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\phi$ ,

$$(\square + m^2)\phi^* = 0. \tag{3.48}$$

De este modo tanto  $\phi$ , como  $\phi^*$ , satisfacen la ecuación de Klein-Gordon. Cada campo además corresponde a una partícula de masa  $m$  como en el caso de  $\phi_1$  y  $\phi_2$

Estamos ahora interesado en las simetrías internas del Lagrangiano. Entonces la corriente conservada puede definida en la sección 1.3, eq. (1.53)

$$\begin{aligned}
J^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta \phi + \delta \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} \\
J^\mu &= \partial^\mu \phi^* \delta \phi + \delta \phi^* \partial^\mu \phi.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Además de la invarianza de Lorentz, el Lagrangiano en ec. (3.46) también es invariante bajo el grupo de transformaciones  $U(1)$  definido en las sección 2.3.1, pero con una fase constante

$$U = e^{i\theta} \approx 1 + i\theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\phi \xrightarrow{U} \phi' &= e^{i\theta} \phi \approx (1 + i\theta)\phi \\
&= \phi + i\theta\phi.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Entonces,

$$\delta \phi = i\theta\phi \tag{3.51}$$

$$\delta \phi^* = -i\theta\phi^*. \tag{3.52}$$

Reemplazando en ec. (3.49)

$$J^\mu \propto -i\theta(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi), \quad (3.53)$$

y

$$\rho = J^0 \propto -i\theta\left(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \quad (3.54)$$

Definimos  $J^\mu$  como

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*), \quad (3.55)$$

Como  $\rho$  puede ser negativo no puede interpretarse como una probabilidad, como se hizo con la función de onda de la ecuación de Schrödinger. Esto presentó un obstáculo en la interpretación inicial de la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo una vez se cuantiza el campo escalar la probabilidad de los estados cuánticos queda bien definida [11].

Para interpretar a que corresponde la densidad de la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar complejo considere la siguiente solución a la ec. (3.47)

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} [a e^{ik \cdot x} + b^* e^{-ik \cdot x}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} [a e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + b^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Donde el factor global es una generalización de la ec. (1.117) para el caso en 3 dimensiones.

Usando la expresión para  $T_\nu^\mu$  se obtiene para el campo complejo

$$\begin{aligned} H &= \omega(a^*a + b^*b) \\ \mathbf{P} &= \mathbf{k}((a^*a + b^*b)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Sea

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} [a e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} - b^* e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}], \quad (3.58)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial t} &= i\omega\bar{\phi} \\ \nabla\phi &= -i\mathbf{k}\bar{\phi}, \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación (3.47)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \nabla \cdot \nabla\phi + m^2\phi &= 0 \\ iw\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + i\mathbf{k} \cdot \nabla\bar{\phi} + m^2\phi &= 0 \\ (-w^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)\phi &= 0 \\ (w^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)\phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como era de esperarse, para que la ec. (3.56) sea solución a la ecuación de Klein-Gordon,  $w$  y  $\mathbf{k}$  deben satisfacer la ecuación de energía-momentum de la relatividad especial.

La ec. (3.58) también puede escribirse como

$$\phi = a\phi^- + b^*\phi^+ \quad (3.60)$$

donde,

$$\begin{aligned}\phi^- &= \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ \phi^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}\end{aligned}\quad (3.61)$$

son las soluciones de energía negativa y positiva respectivamente, a la ecuación de Klein-Gordon, si  $\omega$  es una cantidad definido positiva. Entonces, si  $\theta > 0$

$$\begin{aligned}J_+^0 &= i(\phi^{+*} \frac{\partial \phi^+}{\partial t} - \phi^+ \frac{\partial \phi^{+*}}{\partial t}) \\ &= \frac{i}{2\omega L^3} [(-i\omega) - (i\omega)] \\ &= \frac{1}{L^3} > 0.\end{aligned}\quad (3.62)$$

$$J_-^0 = -\frac{1}{L^3} < 0. \quad (3.63)$$

Note que el signo de la corriente sólo depende del signo de  $\omega$ . El signo de  $\mathbf{k}$  establece en que dirección se mueve la partícula.

Entonces, la carga conservada es

$$Q^\pm = \int_V d^3x J_\pm^0 = \pm 1 \quad (3.64)$$

Además de la expresión para la energía del campo en eq. (1.78), y usando la ec. (3.49).

$$\begin{aligned}T_\nu^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^* \partial^\mu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}\end{aligned}\quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}T_0^0 &= 2\partial^0 \phi \partial_0 \phi^* - \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 \phi^* \phi \\ &= \partial^0 \phi \partial_0 \phi^* - \partial^i \phi^* \partial_i \phi + m^2 \phi^* \phi \\ &= \partial^0 \phi \partial_0 \phi^* + \nabla \phi^* \cdot \nabla \phi + m^2 \phi^* \phi\end{aligned}\quad (3.66)$$

$$T_0^i = \partial^i \phi^* \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \partial^i \phi \quad (3.67)$$

Para  $\phi^+$  (o  $\phi^-$ )

$$\begin{aligned}T_0^0 &= \frac{1}{2\omega L^3} [(-i\omega)(i\omega) + (i\mathbf{k}) \cdot (-i\mathbf{k}) + m^2] \\ &= \frac{1}{2\omega L^3} [\omega^2 + \mathbf{k}^2 + m^2] \\ &= \frac{1}{2\omega L^3} [\omega^2 + \omega^2] \\ &= \frac{\omega}{L^3}\end{aligned}\quad (3.68)$$

y

$$E^\pm = \int_V d^3x T_0^0 = \omega > 0 \quad (3.69)$$

Por consiguiente podemos interpretar  $\phi^+$  como un campo representando a una partícula de carga positiva (campo de frecuencia negativa) y a  $\phi^-$  como un campo representando a una partícula de carga negativa (campo de frecuencia positiva). La cantidad conservada debido a la invarianza de fase corresponde a la carga eléctrica.

Un campo escalar real tendría carga cero de acuerdo a la ec (3.54).

Generalizando (3.61) tenemos

$$\begin{aligned} \pi^+ \rightarrow, & \quad \phi_{\rightarrow}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} e^{i(-\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ \pi^+ \leftarrow, & \quad \phi_{\leftarrow}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} e^{i(-\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ \pi^- \rightarrow, & \quad \phi_{\rightarrow}^- = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} e^{i(+\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ \pi^- \leftarrow, & \quad \phi_{\leftarrow}^- = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}} e^{i(+\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Para relacionar con el momentum de la partícula

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} (\partial_i \phi) + (\partial_i \phi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)} \\ &= \partial^0 \phi^* \partial_i \phi + \partial_i \phi^* \partial^0 \phi, \end{aligned} \quad (3.71)$$

Tenemos para  $\phi_{\pm}^\pm = 1/(\sqrt{2\omega L^3}) \exp[\mp i(\omega t - k^i x^i)]$ ,  $(\phi_{\pm}^\pm)^* = \phi_{\mp}^\mp = 1/(\sqrt{2\omega L^3}) \exp[\pm i(\omega t - k^i x^i)]$

$$\begin{aligned} T_i^0 &= \partial^0 \phi_{\mp}^\mp \partial_i \phi_{\pm}^\pm + \partial_i \phi_{\mp}^\mp \partial^0 \phi_{\pm}^\pm \\ &= \frac{1}{2\omega L^3} [(\pm i\omega)(\pm i k^i) + (\mp i k^i)(\mp i\omega)] \\ &= -\frac{k^i}{L^3} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Definimos

$$P^i = - \int_V d^3x T_i^0 = k^i \quad (3.73)$$

De modo que

$$\mathbf{P} = \mathbf{k} \quad (3.74)$$

Para las soluciones  $\phi_{\pm}^\pm$ , tenemos  $\mathbf{P} = -\mathbf{k}$ .

En el caso de una dimensión  $z$ , el sentido de las flechas entonces representa la si la partícula se mueve a la derecha,  $\rightarrow$  con  $T_3^0 < 0$ , o a la izquierda,  $\leftarrow$   $T_3^0 > 0$ .

Si los campos escalares representan piones el campo escalar real puede representar a un  $\pi^0$ , mientras que el campo escalar complejo junto con su conjugado representarían al  $\pi^+$  y al  $\pi^-$ . Tenemos dos casos interesantes

- 1 Para distancias suficientemente grandes entre piones cargados, las interacciones nucleares serían despreciables y solo interactúan electromagnéticamente a través del intercambio de fotones. En este caso los piones cargados serían la fuente de la corriente electromagnética dada en la ec. (3.55). El análisis de este caso dará lugar a una Teoría Gauge Local Abelina, representada por el grupo U(1).
- 2 A nivel de las interacciones nucleares, los tres piones serían indistinguibles y formarían un triplete de isospin fuerte que media la interacción, mientras que el neutrón y el protón formarían un doblete y serían la fuente de los piones. Esto complementa el modelo de Yukawa presentado en la sección 3.1 que requería la existencia de tres piones para mediar la interacción, el  $\pi^\pm$  y  $\pi^0$ . El análisis de este caso dará lugar a una Teoría Gauge Local No Abelina, representada por el grupo SU(2) y que conserva la carga de isospín fuerte localmente.

### 3.3. Invarianza gauge local abeliana

Considere la representación del Grupo U(1), que de acuerdo a la sección 2.3.1 es

$$U(x) = e^{i\theta(x)} \quad (3.75)$$

En el Lagrangiano en ec. (3.46)

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \quad (3.76)$$

el término de masa es invariante bajo la transformación

$$\begin{aligned} \phi &\xrightarrow{U} \phi' = U\phi \\ \phi^* &\xrightarrow{U} \phi'^* = \phi^* U^{-1}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

pero el término cinético no lo es. Sin embargo, si cambiamos  $\partial_\mu$ , por una derivada covariante  $\mathcal{D}_\mu$ , tal que la derivada covariante del campo transforme como el campo:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu \phi &\xrightarrow{U} (\mathcal{D}^\mu \phi)' = U (\mathcal{D}^\mu \phi) \\ (\mathcal{D}^\mu \phi)^* &\xrightarrow{U} (\mathcal{D}^\mu \phi)^{*'} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* U^{-1}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

entonces el Lagrangiano obtenido por reemplazo  $\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu$ :

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi, \quad (3.79)$$

es invariante bajo el grupo de Transformaciones U(1):  $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L}$ . Diremos en ese caso que el Lagrangiano, y por consiguiente la Acción, es *invariante gauge local* bajo U(1).

Desarrollando la ec. (3.78), tenemos que

$$\widehat{\mathcal{D}}_\mu \phi \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_\mu \phi)' = \widehat{\mathcal{D}}'_\mu U\phi = U\widehat{\mathcal{D}}_\mu \phi \quad (3.80)$$

Cuando sea necesario indicaremos el carácter de operador de  $\mathcal{D}$  con  $\widehat{\mathcal{D}}$ .

Por consiguiente

$$\mathcal{D}^\mu U = U\mathcal{D}^\mu \quad (3.81)$$

$$\mathcal{D}^\mu \rightarrow (\mathcal{D}^\mu)' = U\mathcal{D}^\mu U^{-1} \quad (3.82)$$

Las ecs. (3.78) no se satisfacen para  $\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu$ . Sin embargo, definiendo

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - igA^\mu \quad (3.83)$$

Para que las ecs. (3.78) se satisfagan, tenemos de la ecuación (3.80) que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu \phi \rightarrow (\mathcal{D}^\mu \phi)' &= (\partial^\mu - igA'^\mu)U\phi = U(\partial^\mu - igA^\mu)\mathcal{D}\phi \\ U\partial^\mu \phi + (\partial^\mu U)\phi - igA'^\mu U\phi &= U\partial^\mu \phi - igA^\mu \phi \\ (\partial^\mu U)\phi - igA'^\mu U\phi &= -igUA^\mu \phi \\ -igA'^\mu U\phi &= -(\partial^\mu U)\phi - igUA^\mu \phi \\ A'^\mu U &= \frac{1}{ig}(\partial^\mu U) + UA^\mu \\ A'^\mu &= -\frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} + UA^\mu U^{-1}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

From this general formula we have

$$\begin{aligned} A^\mu \xrightarrow{U} A'^\mu &= UA^\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} \\ &= A^\mu - \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} \\ &= A^\mu - \frac{i}{g}(i\partial^\mu \theta)UU^{-1} \\ &= A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu \theta. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Así, el campo  $A^\mu$  que se requiere para satisfacer las propiedades de la derivada covariante transforma justamente como el campo vectorial electromagnético. La ec. (3.83) da lugar a la *sustitución mínima* del operador de momentum

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + gA^\mu \quad (3.86)$$

Veremos que la carga conservada  $U(1)$  se puede identificar con la carga eléctrica. Entonces fijamos

$$g = -e \quad (3.87)$$

Podemos encontrar que

$$\widehat{F}^{\mu\nu} = \frac{i}{g}[\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \quad (3.88)$$

ya que

$$\begin{aligned}
\widehat{F}^{\mu\nu}\phi &= \frac{i}{g} [\partial^\mu - igA^\mu, \partial^\nu - igA^\nu] \phi \\
&= \frac{i}{g} [(\partial^\mu - igA^\mu)(\partial^\nu - igA^\nu)\phi - (\partial^\nu - igA^\nu)(\partial^\mu - igA^\mu)\phi] \\
&= \frac{i}{g} \{ \partial^\mu \partial^\nu \phi - g^2 A^\mu A^\nu \phi - ig[\partial^\mu(A^\nu \phi) + A^\mu \partial^\nu \phi] - \partial^\nu \partial^\mu \phi + g^2 A^\nu A^\mu \phi + ig[\partial^\nu(A^\mu \phi) + A^\nu \partial^\mu \phi] \} \\
&= \frac{i}{g} \{ (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^\nu \partial^\mu)\phi - g^2(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu)\phi - ig[(\partial^\mu A^\nu) - (\partial^\nu A^\mu)]\phi \\
&\quad - ig[A^\nu \partial^\mu \phi + A^\mu \partial^\nu \phi - A^\mu \partial^\nu \phi + A^\nu \partial^\mu \phi] \} \\
&= [(\partial^\mu A^\nu) - (\partial^\nu A^\mu) - ig(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu)]\phi
\end{aligned} \tag{3.89}$$

Como  $A^\mu$  y  $A^\nu$  conmutan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3.90}$$

Con esta expresión para  $\widehat{F}^{\mu\nu}$  podemos demostrar su invarianza gauge a partir de la transformación de la derivada covariante

$$\begin{aligned}
(\widehat{F}^{\mu\nu})' &= \frac{i}{g} [\mathcal{D}'^\mu, \mathcal{D}'^\nu] \\
&= \frac{i}{g} [U\mathcal{D}^\mu U^{-1}, U\mathcal{D}^\nu U^{-1}] \\
&= U\widehat{F}^{\mu\nu}U^{-1} \\
&= \widehat{F}^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

El Lagrangiano más general es, que incluye todos los términos invariantes gauge y renormalizables para los campos  $\phi$  y  $A^\mu$  es

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{3.92}$$

Desarrollando el primer término

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi &= [(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi]^* (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \\
&= (\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*) (\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi) \\
&= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + ieA_\mu (\partial^\mu \phi^*) \phi - ieA^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + e^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Por consiguiente el Lagrangiano en ec. (3.92) puede escribirse como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{escalar}} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{int}} \tag{3.94}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -ieA_\mu (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + e^2 A^\mu A_\mu \phi^* \phi. \tag{3.95}$$

El campo vectorial  $A^\mu$  aparece como consecuencia de la invarianza gauge del Lagrangiano en ec. (3.79). En tal caso lo llamaremos un *bosón gauge*.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\ -\partial_\mu F^{\mu\nu} - e [-i(\phi^* \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \phi^*) + 2e A^\nu \phi^* \phi] &= 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Las ecuaciones de movimiento para el campo vectorial son entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e j^\nu \quad (3.97)$$

donde

$$j^\mu = i [\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi] - 2e A^\mu \phi^* \phi = J^\mu - 2e A^\mu \phi^* \phi. \quad (3.98)$$

Usando la primera ecuación en (3.49), tenemos que ( $\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + ie A^\mu$ )

$$j^\mu = i [\phi^* \mathcal{D}^\mu \phi - (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \phi]. \quad (3.99)$$

De otro lado, las ecuaciones de movimiento para el campo escalar complejo

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} &= 0 \\ \partial_\mu (\partial^\mu \phi + ie A^\mu \phi) - (-m^2 \phi - ie A_\mu \partial^\mu \phi + e^2 A^\mu A_\mu \phi) &= 0 \\ \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + ie \partial_\mu (A^\mu \phi) + ie A^\mu \partial_\mu \phi - e^2 A^\mu A_\mu \phi &= 0 \end{aligned} \quad (3.100)$$

dan lugar a

$$(\square + m^2 + \hat{U}(x))\phi = 0, \quad (3.101)$$

donde

$$\hat{U}(x) = ie(A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) - e^2 A^\mu A_\mu \quad (3.102)$$

El operado en el segundo término opera en  $A_\mu$  y  $\phi$ . A la luz de los resultados la escogencia de la derivada covariante en la ec. (3.83), puede justificarse adicionalmente a partir de la Fuerza de Lorentz para una partícula de carga  $q$  moviéndose con una velocidad  $v$  bajo la influencia tanto del campo magnético como del campo eléctrico

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (3.103)$$

Esta expresión puede ser deriva, a través de las ecuaciones de Hamilton, del Hamiltoniano clásico

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + qA_0 \\ H - qA^0 &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 \end{aligned} \quad (3.104)$$

que a su vez puede obtenerse del Hamiltoniano para una partícula libre con el reemplazo

$$H \rightarrow H - qA^0 \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - q\mathbf{A} \quad (3.105)$$

En términos de los operadores  $\hat{H}$  y  $\hat{\mathbf{p}}$ , tenemos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} - qA^0 & -i\nabla &\rightarrow -i\nabla - q\mathbf{A} \\ \frac{\partial}{\partial t} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + iqA^0 & \partial_i &\rightarrow \partial_i - iqA^i = \partial_i + iqA_i. \end{aligned} \quad (3.106)$$

De modo que

$$\partial^\mu = (\partial^0, \partial^i) \rightarrow \mathcal{D}^\mu = (\partial^0 + iqA^0, \partial^i + iqA^i) = \partial^\mu + iqA^\mu. \quad (3.107)$$

### 3.3.1. Aplicación a barrera de potencial

Considere una barrera de potencial,

$$A^0 = \begin{cases} 0 & \text{A la izquierda de la barrera (Región I)} \\ V & \text{A la derecha de la barrera (Región II)} \end{cases} \quad (3.108)$$

tal como se muestra en la figura 3.3. Las componentes del campo vectorial son  $\mathbf{A} = 0$  y  $A_0 = V$ , con  $A_0$  independiente del tiempo pues el potencial es constante. Entonces, de la ec. (3.102) tenemos que para la Región II

$$\begin{aligned} \hat{U}(x) &= ie(A^0\partial_0 + \partial_0A^0) - e^2A_0^2 \\ &= ie(A^0\partial_0 + A^0\partial_0) - e^2A_0^2 \\ &= 2ieV\frac{\partial}{\partial t} - e^2V^2 \end{aligned} \quad (3.109)$$

y

$$(\square + m^2 + 2ieV\frac{\partial}{\partial t} - e^2V^2)\phi = 0. \quad (3.110)$$

Se sugiere que en la Región I

$$\phi_{\text{I}} = A e^{i(pz-Et)} + B e^{-i(pz+Et)} \quad (3.111)$$

De acuerdo al cálculo de la corriente en ec. (3.62) esta solución representa partículas con carga positiva. Además de la ec.(3.70) la solución con coeficiente  $A$  representa un  $\pi^+$  moviéndose a la derecha, mientras que la de coeficiente  $B$  representa un  $\pi^+$  moviéndose a la izquierda.

Otra forma de mostrar con que dirección las soluciones evolucionan con el tiempo es haciendo paquetes de onda [11]. El paquete de onda es

$$\begin{aligned} e^{i(pz-Et)} &= \exp \left[ i \left( \sqrt{E^2 - m^2} z - Et \right) \right] \\ &\rightarrow \int_{E_0 - \Delta E}^{E_0 + \Delta E} dE \exp \left[ i \left( \sqrt{E^2 - m^2} z - Et \right) \right] \end{aligned} \quad (3.112)$$

sea  $u = E - E_0 \ll 1$ , entonces  $E = u + E_0$ ,  $dE = du$ ,  $E = E_0 - \Delta E$  da lugar a  $u = -\Delta E$ , y

$$\begin{aligned} \sqrt{E^2 - m^2} &= \sqrt{(u + E_0)^2 - m^2} = \sqrt{u^2 + 2uE_0 + E_0^2 - m^2} \approx \sqrt{2uE_0 + p_0^2} \\ &= p_0 \sqrt{1 + \frac{2uE_0}{p_0^2}} \approx p_0 \left( 1 + \frac{uE_0}{p_0^2} \right) = p_0 + \frac{uE_0}{p_0} \end{aligned} \quad (3.113)$$

donde  $p_0^2 \equiv |\mathbf{p}_0|^2 = E_0^2 - m^2$ . Para una partícula no relativista  $E_0/p_0 = m/(mv_0) = 1/v_0$ . En general

$$v_0 = \frac{p_0}{E_0} \quad (3.114)$$

$$\sqrt{E^2 - m^2} \approx p_0 + \frac{u}{v_0} \quad (3.115)$$

sustituyendo en ec. (3.112)

$$e^{i(pz-Et)} \rightarrow \int_{-\Delta E}^{\Delta E} du \exp \left\{ i \left[ \left( p_0 + \frac{u}{v_0} \right) z - (u + E_0)t \right] \right\} \quad (3.116)$$

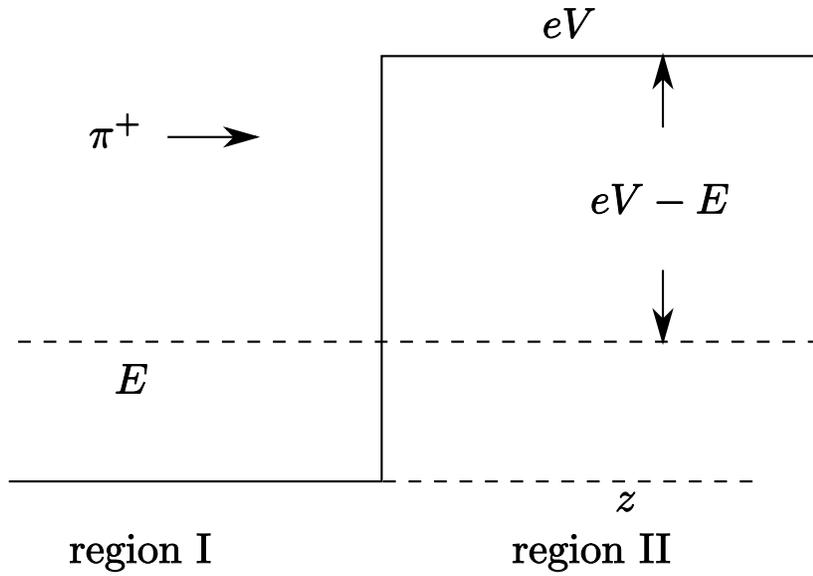


Figura 3.3: Barrera de potencial

$$\rightarrow e^{ip_0z - E_0t} \int_{-\Delta E}^{\Delta E} du \exp \left[ i \left( \frac{u}{v_0} z - ut \right) \right] \quad (3.117)$$

$$\rightarrow e^{ip_0z - E_0t} \int_{-\Delta E}^{\Delta E} du \exp \left[ iu \left( \frac{z}{v_0} - t \right) \right] \quad (3.118)$$

$$\rightarrow e^{ip_0z - E_0t} \int_{-\Delta E}^{\Delta E} du \exp \left[ iu \left( \frac{z - v_0t}{v_0} \right) \right] \quad (3.119)$$

Que corresponde a un pulso de energía  $E_0$  y momentum  $p_0$  moviéndose hacia la derecha Sea

$$\eta^- = \frac{z - v_0t}{v_0} \quad (3.120)$$

Entonces

$$f(\eta) = \int_{-\Delta E}^{\Delta E} dE e^{iE\eta} = 2 \frac{\sin(\eta\Delta E)}{\eta} \quad (3.121)$$

$$\varphi_I = A e^{i(p_0z - E_0t)} f \left( \frac{z - v_0t}{v_0} \right) + B e^{-i(p_0z + E_0t)} f \left( \frac{z + v_0t}{v_0} \right), \quad (3.122)$$

y  $v_0 = p_0/E_0$ . Entonces, la parte con coeficiente  $A$  corresponde a un  $\pi^+$  incidente moviéndose hacia la derecha, y la parte con coeficiente  $B$  a un  $\pi^+$  reflejado moviéndose hacia la izquierda (ver figura 3.3).

Para la Región II, consideramos exponenciales de la misma fase que en la región I pero con el momentum modificado debido a la presencia del potencial. En la región I las soluciones correspondían

a partículas con  $J^0 = J_+^0 > 0$ . En la región II deberemos calcular los correspondientes  $j^0$  de la ec. (3.98) e interpretar el signo resultante

$$\phi_{II} = C e^{i(-Pz-Et)} + D e^{i(Pz-Et)}. \quad (3.123)$$

Esta es solución a la ec. (3.110)

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + m^2 + 2ieV \frac{\partial}{\partial t} - e^2 V^2 \right) \phi_{II} &= 0 \\ (-E^2 + P^2 + m^2 + 2eVE - e^2 V^2) \phi_{II} &= 0 \\ [-(eV - E)^2 + P^2 + m^2] \phi_{II} &= 0 \end{aligned} \quad (3.124)$$

de modo que

$$P = \sqrt{(eV - E)^2 - m^2} \quad (3.125)$$

Note que  $P \rightarrow p$  cuando  $V = 0$ . Si  $eV - E < m$  tenemos la solución amortiguada convencional. Sin embargo, en el caso de una barrera alta  $eV - E > m$  tendremos soluciones oscilatorias. En adelante nos concentraremos en ésta posibilidad, que corresponde a una barrera suficientemente alta.

El cálculo de la corriente en la Región II, está dado por  $j^\mu$  en la ec. (3.98). Para  $C = 0$  o  $D = 0$ ,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^L j^0 dz = \int_0^L \{ i [\phi^* \partial^0 \phi - (\partial^0 \phi^*) \phi] - 2e A^0 \phi^* \phi \} dz \\ &= \int_0^L \{ i[-iE - (iE)] - 2eV \} |\phi|^2 dz \\ &= \begin{cases} -2|C|^2 \int_0^L (eV - E) dz = -2|C|^2 L(eV - E) < 0, & D = 0 \\ -2|D|^2 \int_0^L (eV - E) dz = -2|D|^2 L(eV - E) < 0, & C = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.126)$$

y corresponde a una partícula cargada negativamente que interpretaremos como un  $\pi^-$ . Para identificar cual es el transmitido, es decir moviéndose hacia la derecha usaremos de nuevo los dos métodos descritos anteriormente. De la expresión para el momentum tenemos

$$T_3^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} \partial_3 \phi + \partial_3 \phi^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^*)}, \quad (3.127)$$

donde el Lagrangiano obtenido a partir de la ec. (3.94) es

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - ieV(\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^*) + e^2 V^2 \phi^* \phi. \quad (3.128)$$

Entonces

$$T_3^0 = (\partial^0 \phi^* - ieV \phi^*) \partial_3 \phi + \partial_3 \phi^* (\partial^0 \phi + ieV \phi). \quad (3.129)$$

De la ec. (3.123), para  $\phi \propto e^{i(\mp Pz - Et)}$ , tenemos

$$\begin{aligned} T_3^0 &\propto [iE - ieV](\mp iP) + (\pm iP)[-iE + ieV] \\ &\propto -2 \times (\mp 1)(E - eV)P \\ &\propto \begin{cases} -2(eV - E)P & D = 0 \\ +2(eV - E)P & C = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Para una la barrera alta  $eV - E > m > 0$ , de acuerdo a las convenciones, si  $T_3^0 < 0$  la partícula se mueve hacia la derecha, y se mueve a la izquierda si  $T_3^0 > 0$ . De modo que la solución con coeficiente  $C$  cooresponde a un  $\pi^-$  moviéndose a la derecha y la solución con coeficiente  $D$  corresponde a un  $\pi^-$  moviéndose a la izquierda. Note que cuando  $V = 0$ , la solución  $C e^{i(-Pz-Et)}$ ,  $j^0 > 0$  y  $T_3^0 > 0$  corresponde a  $\pi^+$  moviéndose a la izquierda. Para completar la descripción, consideramos un  $\pi^+$  moviéndose a la derecha hacia la barrera como en la figura 3.3. Esto significa que cualquier mesón  $\pi^-$  debe ser producido por la interacción con la barrera y viajará hacia la derecha dentro de la región II. De aquí que para la condición de frontera  $D = 0$ , la solución es

$$\begin{aligned}\phi_I &= A e^{i(pz-Et)} + B e^{-i(pz+Et)} \\ \phi_{II} &= C e^{i(-Pz-Et)}.\end{aligned}\tag{3.131}$$

De otro lado podemos construir el paquete de onda correspondiente en cada caso. Por ejemplo la condición de frontera  $D = 0$  da lugar a una partícula  $\pi^-$  moviéndose a la derecha. En efecto, el paquete de onda es

$$\varphi_{II} = C e^{-i(P_0z+E_0t)} f\left(\frac{z-u_0t}{u_0}\right),\tag{3.132}$$

con

$$u_0 = \frac{P_0}{eV - E_0} = \frac{P_0}{\sqrt{P_0^2 + m^2}}\tag{3.133}$$

Note que en el caso  $V = 0$ , esta da lugar a un  $\pi^+$  moviéndose a la izquierda como era de esperarse. De manera que emerge un marco consistente de un partícula de masa  $m$  y carga  $-e$  moviéndose hacia la derecha. De aquí que para la condición de frontera  $D = 0$ , la solución normalizando  $A = 1$  es [11]

$$\begin{aligned}\phi_I &= e^{i(p_0z-E_0t)} f\left(\frac{z-v_0t}{v_0}\right) - \frac{P_0+p_0}{P_0-p_0} e^{-i(p_0z+E_0t)} f\left(\frac{z+v_0t}{v_0}\right), \\ \phi_{II} &= -\frac{2p_0}{P_0-p_0} e^{-i(P_0z+E_0t)} f\left(\frac{z-u_0t}{u_0}\right),\end{aligned}\tag{3.134}$$

Este resultado se interpreta diciendo que el pión incidente no solo se dispersa en la barrera ( $B \neq 1$ ), sino que también estimula la barrera para producir un par  $\pi^+\pi^-$ , el  $\pi^-$  viaja dentro de la barrera la cual ve como un hueco, mientras que el  $\pi^+$  producido por la barrera viaja hacia la izquierda. Si  $J^0$  y  $j^0$  son interpretados como la densidad de carga, la interpretación es consistente y tiene sentido físico. La energía y la carga se conservan [11].

### Example 3.3.1.1

Escriba la ec. (3.92) en coordenadas polares.

Sea  $\phi = e^{i\eta(x)}\rho(x)/\sqrt{2}$ , con  $\eta$  y  $\rho$  reales. Bajo una transformación gauge

$$\begin{aligned}A^\mu &\rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta \\ \phi &\rightarrow \phi' = e^{i\theta(x)}e^{i\eta(x)}\frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{3.135}$$

Si fijamos el gauge tal que  $\theta = -\eta$ , entonces  $\phi' = \rho$ , y

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= [(\mathcal{D}_\mu)' \phi']^* (\mathcal{D}^\mu)' \phi' - (m^2 \phi^* \phi)' - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})' \\
\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= (\partial_\mu + igA_\mu') \phi^{*'} (\partial^\mu - igA^{\mu'}) \phi' - (m^2 \phi^* \phi)' - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})' \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\mu + igA_\mu') \rho (\partial^\mu - igA^{\mu'}) \rho - \frac{1}{2} m^2 \rho^2 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})'
\end{aligned}$$

En adelante, podemos quitar la prima del campo  $A^\mu$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} m^2 \rho^2 + g^2 A^\mu A_\mu \rho^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.136)$$

Aunque este gauge es de poca utilidad en este contexto, será de mucha utilidad en la discusión del rompimiento espontáneo de simetría.

### 3.4. Aplicación a la mecánica cuántica

De la ecuación (3.104) podemos obtener la ecuación de Schödinger en presencia de un campo electromagnético

$$\begin{aligned}
\widehat{H}\psi &= \left[ \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + qA_0 \right] \psi \\
i \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \left[ \frac{1}{2m} (-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qA_0 \right] \psi.
\end{aligned} \quad (3.137)$$

Que puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
i \left( \frac{\partial}{\partial t} + iqA^0 \right) \psi &= i^2 \frac{1}{2m} (\nabla - iq\mathbf{A})^2 \psi \\
i \left( \frac{\partial}{\partial t} + iqA^0 \right) \psi &= -\frac{1}{2m} (\nabla - iq\mathbf{A})^2 \psi
\end{aligned} \quad (3.138)$$

Definiendo el cuadvivector

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\mu &= (\mathcal{D}^0, -\mathcal{D}) \\
&\equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + iqA^0, -(\nabla - iq\mathbf{A}) \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial t} + iqA^0, -\partial_i + iqA^i \right) \\
&= \left( \frac{\partial}{\partial t} + iqA^0, \partial^i + iqA^i \right) \\
&= \partial^\mu + iqA^\mu
\end{aligned} \quad (3.139)$$

tenemos

$$i\mathcal{D}^0\psi = -\frac{1}{2m}\mathcal{D}^2\psi \quad (3.140)$$

que para  $A^\mu = 0$  se reduce a la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. Bajo la transformación gauge en el campo  $A^\mu$  de la ec. (3.85),

$$\begin{aligned} A^0 &\rightarrow A'^0 = A^0 - \frac{1}{q}\partial^0\theta \\ \mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \frac{1}{q}\nabla\theta \end{aligned} \quad (3.141)$$

los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  permanecen los mismos. Para que la mecánica cuántica sea consistente con las ecuaciones de Maxwell es necesario que las transformaciones gauge (3.85) de los potenciales de Maxwell estén acompañados por una transformación de la función de onda,  $\psi \rightarrow \psi'$ , donde  $\psi'$  satisface la ecuación

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}'^2\psi' \\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi' &= \left[ \frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A}')^2 + qA'_0 \right] \psi'. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Como la forma de la ecuación (3.142) es exactamente la misma que la forma de (3.140) entonces ambas describen la misma física. Si podemos encontrar la forma de  $\psi'$  podemos afirmar que la ec. (3.140) es covariante gauge, lo que significa que mantiene la misma forma bajo una transformación gauge. Como conocemos como transforma  $A^\mu$  podemos encontrar cual debe ser el  $\psi'$  que hace que la ecuación (3.142) sea consistente con (3.140). Vamos a establecer la respuesta y verificarla. El  $\psi'$  requerido es

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta(x)}\psi \quad (3.143)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'\psi' &= [(\nabla - iq\mathbf{A}) - i\nabla\theta] e^{i\theta(x)}\psi \\ &= i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\nabla\psi - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}\psi - i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}\psi \\ &= e^{i\theta(x)}(\nabla - iq\mathbf{A})\psi \\ &= e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \end{aligned} \quad (3.144)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'^2\psi' &= \mathcal{D}'(\mathcal{D}'\psi') \\ &= [(\nabla - iq\mathbf{A}) - i\nabla\theta] e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \\ &= i(\nabla\theta)e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) + e^{i\theta(x)}\nabla(\mathcal{D}\psi) - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) - i\nabla\theta e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}\psi) \\ &= e^{i\theta(x)}(\nabla - iq\mathbf{A})(\mathcal{D}\psi) \\ &= e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^2\psi) \end{aligned} \quad (3.145)$$

De la misma manera

$$\mathcal{D}'^0\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^0\psi) \quad (3.146)$$

De modo que

$$\mathcal{D}^\mu\psi \rightarrow \mathcal{D}'^\mu\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^\mu\psi) \quad (3.147)$$

y la derivada covariante del campo transforma como el campo. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}'^2\psi' \\
 ie^{i\theta(x)}\mathcal{D}^0\psi &= -\frac{1}{2m}e^{i\theta(x)}\mathcal{D}^2\psi \\
 i\mathcal{D}^0\psi &= -\frac{1}{2m}\mathcal{D}^2\psi
 \end{aligned} \tag{3.148}$$

En resumen, para

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu \tag{3.149}$$

y reemplazando  $\theta \rightarrow q\theta$  tenemos

$$\begin{aligned}
 A^\mu &\rightarrow A^{\mu'} = A^\mu - \partial^\mu\theta(x) \\
 \psi &\rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)}\psi \\
 \mathcal{D}^\mu\psi &\rightarrow \mathcal{D}'^\mu\psi' = e^{iq\theta(x)}(\mathcal{D}^\mu\psi).
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

En esta convención  $q$  corresponde al *generador* de la transformación y  $\theta$  al parámetro de la transformación.

El correspondiente Lagrangiano es (ver ec. (1.79))

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= \frac{1}{2m}(\mathcal{D}\psi)^* \cdot \mathcal{D}\psi - \frac{i}{2}(\psi^*\mathcal{D}^0\psi - (\mathcal{D}^0\psi)^*\psi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2m}(\partial^i - iqA^i)\psi^*(\partial^i + iqA^i)\psi - \frac{i}{2}(\psi^*(\partial^0 + iqA^0)\psi - [(\partial^0 - iqA^0)\psi^*]\psi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2m}(\partial^i\psi^* - iqA^i\psi^*)(\partial^i\psi + iqA^i\psi) - \frac{i}{2}[\psi^*(\partial^0\psi + iqA^0\psi) - (\partial^0\psi^* - iqA^0\psi^*)\psi] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{2m}[\partial^i\psi^*\partial^i\psi + iq(\partial^i\psi^*)\psi A^i - iq\psi^*(\partial^i\psi)A^i + q^2 A^i A^i \psi^*\psi] \\
 &\quad - \frac{i}{2}[\psi^*(\partial^0\psi) - (\partial^0\psi^*)\psi + 2iq\psi^*\psi A^0] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

La corriente se obtiene de las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $A^\nu$

$$\partial_\mu(-F^{\mu\nu}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

que da lugar a dos conjuntos de ecuaciones, una para  $A^i$

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu(F^{\mu j}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_j} &= 0 \\
 \partial_\mu(F^{\mu j}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A^j} &= 0 \\
 \partial_\mu(F^{\mu j}) - \frac{1}{2m}[iq(\partial^i\psi^*)\psi - iq\psi^*(\partial^i\psi) + 2q^2 A^i\psi^*\psi] &= 0 \\
 \partial_\mu(F^{\mu j}) - \frac{iq}{2m}[(\partial^i\psi^*)\psi - \psi^*(\partial^i\psi) - 2iq\psi^*\psi A^i] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.151}$$

y otra para  $A^0$

$$\begin{aligned}\partial_\mu(F^{\mu 0}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_0} &= 0 \\ \partial_\mu(F^{\mu 0}) + q\psi^*\psi A^0 &= 0\end{aligned}\tag{3.152}$$

Entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

con

$$j^\nu = \begin{cases} -q\psi^*\psi & \nu = 0 \\ \frac{iq}{2m}[(\partial^i\psi^*)\psi - \psi^*\partial^i\psi - 2iq\psi^*\psi A^i] & \nu = i \end{cases}$$

Que incluye el término corriente para una partícula cargada y es diferente de la corriente de probabilidad en ec.(1.87). En otras palabras es la carga eléctrica la que se conserva localmente. Note que para el Lagrangiano de Klein-Gordon de un campo escalar complejo a nivel clásico no está definida la probabilidad.

De otro lado las ecuaciones de Euler–Lagrange para el campo  $\psi^*$  son

$$\begin{aligned}0 &= \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^*)} \right] + \partial_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \psi^*)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} \\ &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_i (\partial_i \psi + iqA_i \psi) - \left[ \frac{1}{2m} (-iq(\partial^i \psi)A^i + q^2 A^i A^i \psi) - \frac{i}{2} \partial^0 \psi + qA^0 \psi \right] \\ &= \frac{i}{2} \partial_0 \psi + \frac{i}{2} \partial^0 \psi - qA^0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_i (\partial_i \psi + iqA_i \psi) + \frac{1}{2m} [iq(\partial^i \psi)A^i - q^2 A^i A^i \psi] \\ &= i\partial_0 \psi + i^2 qA^0 \psi + \frac{1}{2m} \partial_i (\partial_i \psi + iqA_i \psi) + \frac{1}{2m} [iqA^i (\partial^i \psi + iqA^i \psi)] \\ &= i(\partial_0 + iqA_0)\psi + \frac{1}{2m} (\partial_i + iqA_i) (\partial_i + iqA_i) \psi \\ &= i\mathcal{D}_0 \psi + \frac{1}{2m} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_i \psi \\ i\mathcal{D}_0 \psi &= -\frac{1}{2m} \mathcal{D} \cdot \mathcal{D} \psi \\ i\mathcal{D}_0 \psi &= -\frac{1}{2m} \mathcal{D}^2 \psi\end{aligned}$$

Que corresponde a la ec.(3.148), es decir, la ecuación de Schrödinger con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante.

### 3.5. Invarianza gauge local no abeliana

Las interacciones débiles son mediadas por bosones gauges cargados  $W_\mu^\pm$ . ¿Qué simetría puede dar lugar a la aparición de dichos bosones gauge?

El Lagrangiano invariante de Lorentz para un doblete escalar complejo

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (3.153)$$

con  $\phi^+$  y  $\phi^0$  campos escalares complejos es

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \Phi^\dagger) \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi. \quad (3.154)$$

donde

$$\Phi^\dagger = (\phi^- \quad \phi^{0*}), \quad (3.155)$$

de modo que

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^- \partial_\mu \phi^+ - m^2 \phi^- \phi^+ + \partial^\mu \phi^{0*} \partial_\mu \phi^0 - m^2 \phi^{0*} \phi^0 \quad (3.156)$$

que corresponde a los Lagrangianos de las partículas escalares compleja  $\phi^+$  y  $\phi^0$  de la misma masa. De modo que este Lagrangiano se puede obtener con una generalización similar a la que dio lugar al Lagrangiano para un campo escalar complejo a partir de dos campos escalares reales. Note que en este contexto un campo escalar complejo puede ser neutro porque tiene cargas adicionales. En este caso una carga de isospín débil como veremos más adelante.

El Lagrangiano en ec. (3.156) es invariante bajo transformaciones globales

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{iq\theta} \phi \approx \begin{cases} (1 + iq\theta)\phi^+ = [1 + i(+1)\theta]\phi^+, & [(1 + iq\theta)\phi^+]^* = [1 + i(-1)\theta]\phi^- \\ (1 + iq\theta)\phi^0 = [1 + i(0)\theta]\phi^0 = \phi^0, & [(1 + iq\theta)\phi^0]^* = \phi^{0*} \end{cases} \quad (3.157)$$

Estas ecuaciones se pueden escribir de forma más compacta en términos del Lagrangiano en ec. (3.154)

$$\Phi \rightarrow \Phi' = V\Phi = e^{iQ\theta}\Phi \quad (3.158)$$

donde  $V$  es la matriz  $2 \times 2$

$$\begin{aligned} V\Phi &= e^{iQ\theta}\Phi \approx (1 + iQ\theta)\Phi = \Phi + i \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi = \Phi + i\theta \begin{pmatrix} (+1)\phi^+ \\ (0)\phi^0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + i\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta}\phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.159)$$

donde  $Q$  es el generador de carga eléctrica. Es claro que el Lagrangiano en ec. (3.154) es invariante bajo la transformación (3.158). Además de la última ecuación vemos que el campo  $\phi^+$  transforma como un campo complejo cargado, mientras que  $\phi^0$  es invariante bajo la transformación de carga, es decir, neutro. Si imponemos que la carga eléctrica se conserve localmente

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (3.160)$$

Expandiendo tenemos, teniendo en cuenta la ec. (3.179)<sup>1</sup>,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial^\mu \Phi^\dagger + ie\Phi^\dagger Q A^\mu) (\partial_\mu \Phi - ieA_\mu Q \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + ie [\Phi^\dagger Q A_\mu \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) A_\mu Q \Phi] + e^2 \Phi^\dagger Q A^\mu Q A_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + ie [\Phi^\dagger A_\mu Q \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) A_\mu Q \Phi] + e^2 \Phi^\dagger Q^2 A^\mu A_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + ie [\Phi^\dagger Q \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) Q \Phi] A_\mu + e^2 \Phi^\dagger Q^2 A^\mu A_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + [i\Phi^\dagger (eQ A_\mu) \partial^\mu \Phi + \text{h.c.}] + e^2 \Phi^\dagger Q^2 A^\mu A_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.161)$$

<sup>1</sup>Hasta aquí muchos de los resultados son independientes de la representación de  $SU(2)$  usada y se puede pasar a la sección 3.7

Note que  $V$  es unitaria

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^\dagger V = 1. \quad (3.162)$$

con  $\det V = e^{i\theta}$ . De este modo el Lagrangiano es invariante bajo el grupo  $U(1)_Q$ .

Además, el Lagrangiano en ec. (3.154) también es invariante bajo transformaciones globales del grupo de matrices unitarias  $2 \times 2$  de determinante 1  $SU(2)$ :

$$\begin{aligned} \Phi &\xrightarrow{U} \Phi' = U\Phi \\ \Phi^\dagger &\xrightarrow{U} (\Phi')^\dagger = \Phi^\dagger U^\dagger, \end{aligned} \quad (3.163)$$

con

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad \det U = 1 \quad (3.164)$$

En general, un elemento del Grupo  $SU(N)$  puede escribirse como

$$U = \exp(iT^j \theta_j) \quad (3.165)$$

donde  $\theta_j$  son los parámetros de la transformación y  $T^j$  corresponden a los  $N^2 - 1$  generadores del Grupo. Estos generadores deben ser hermíticos, de traza nula, es decir

$$\text{Tr } T^i = 0 \quad T^\dagger = T \quad (3.166)$$

y satisfacer el álgebra

$$[T^i, T^j] = i f_{ijk} T^k \quad (3.167)$$

donde a  $f_{ijk}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, N^2 - 1$ , se les llama *constantes de estructura* del Grupo y son antisimétricas en todos los índices.

Una representación del grupo  $SU(2)$  se puede obtener con las matrices de Pauli  $2 \times 2$  [16], que satisfacen el álgebra

$$\left[ \frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau^k}{2} \quad (3.168)$$

donde  $\tau^i$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.169)$$

dividas por dos, corresponden a los generadores del Grupo. Las constantes de estructura del Grupo corresponden a  $\epsilon_{ijk}$ . Como los generadores no conmutan,  $SU(2)$  es un Grupo de Lie no Abelian. Definiendo los generadores de  $SU(2)$  como

$$T^i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (3.170)$$

un elemento del Grupo puede escribirse como

$$U = e^{iT^i \theta_i} \approx 1 + iT^i \theta_i = 1 + i \frac{\tau^i}{2} \theta_i. \quad (3.171)$$

Como antes,  $\theta_i$  es el parámetro de la transformación. Siempre que sea posible intentaremos expresar los resultados independiente de la representación para usarlos de nuevo en la sección 3.7.

Las matrices de Pauli y por consiguiente  $T_i$  satisfacen

$$\begin{aligned}\tau_i^\dagger &= \tau_i \\ \text{Tr}(\tau_i) &= 0\end{aligned}\tag{3.172}$$

Además

$$\begin{aligned}\det(\tau_i) &= -1 \\ \{\tau_i, \tau_j\} &= 2\delta_{ij} \cdot I \Rightarrow \tau_i^2 = I \\ \text{Tr}(\tau^i \tau^j) &= 2\delta^{ij} \\ \tau_i \tau_j &= i\epsilon_{ijk} \tau_k + \delta_{ij}\end{aligned}\tag{3.173}$$

Para demostrar la penúltima propiedad por ejemplo, tenemos del anticonmutador que

$$\begin{aligned}\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i &= 2\delta_{ij} \cdot I \\ \text{Tr}(\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i) &= 2\delta_{ij} \text{Tr} I \\ \text{Tr}(\tau_i \tau_j) + \text{Tr}(\tau_j \tau_i) &= 4\delta_{ij} \\ \text{Tr}(\tau_i \tau_j) + \text{Tr}(\tau_i \tau_j) &= 4\delta_{ij} \\ 2 \text{Tr}(\tau_i \tau_j) &= 4\delta_{ij} \\ \text{Tr}(\tau_i \tau_j) &= 2\delta_{ij}\end{aligned}$$

El campo  $\Phi$  corresponde a un doblete de  $SU(2)$ . Este grupo  $SU(2)$ , con algunas modificaciones que no afectan la actual descripción, será usado para generar las interacciones débiles, de forma análoga a como el grupo  $U(1)$  se usó para generar las interacciones electromagnéticas. Es decir a partir del principio gauge local. De momento, cada componente del doblete tiene una carga de isospín débil que se conserva globalmente y que corresponde a

$$T_3 \Phi = \frac{\tau_3}{2} \Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \phi^+ \\ -\frac{1}{2} \phi^0 \end{pmatrix}.\tag{3.174}$$

Es decir  $\phi^+$  tiene isospín débil  $1/2$  y  $\phi^0$   $-1/2$ .

En esta sección analizaremos la posibilidad de convertir la invarianza gauge global no abeliana a una invarianza gauge local. En la próxima sección se convertirán todas las invarianzas gauge globales del Lagrangiano a locales.

Como en el caso Abeliano, ahora requeriremos que la Acción también sea invariante bajo transformaciones locales  $SU(2)$ , de modo que  $\theta_i = \theta_i(x)$ . Ya que tenemos tres parámetros gauge  $\theta_i(x)$  esto requiere la introducción de 3 campos gauge  $W_i^\mu$ , y la derivada covariante es ahora una matriz  $2 \times 2$ :

$$\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - igT^i W_i^\mu \equiv \partial^\mu - igW^\mu,\tag{3.175}$$

donde  $\partial^\mu = I \cdot \partial^\mu$  y  $W^\mu$  es una matriz  $2 \times 2$  de componentes

$$(W^\mu)_{ab} = \left( \frac{\tau^i}{2} \right)_{ab} W_i^\mu.\tag{3.176}$$

tenemos que  $W_\mu$  es

$$\begin{aligned}
W_\mu &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} \frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} \frac{W_\mu^1 + i W_\mu^2}{\sqrt{2}} & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2} W_\mu^+ \\ \sqrt{2} W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix}. \tag{3.177}
\end{aligned}$$

Siempre que no haya lugar a confusión, es costumbre no poner el índice  $\mu$  a los campos vectoriales componentes de  $W^\mu$ , de modo que

$$W^\mu = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2} W^+ \\ \sqrt{2} W^- & -W^3 \end{pmatrix}^\mu. \tag{3.178}$$

Además

$$W^{\mu\dagger} = W^\mu. \tag{3.179}$$

El Lagrangiano invariante gauge local bajo  $SU(2)$  es

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi. \tag{3.180}$$

Muchas de las ecuaciones en sección 3.3 aplican igualmente aquí. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi &\rightarrow \Phi' = U\Phi \\
\Phi^\dagger &\rightarrow \Phi'^\dagger = \Phi^\dagger U^\dagger \\
\mathcal{D}_\mu \Phi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \Phi)' = U(\mathcal{D}_\mu \Phi) \\
\mathcal{D}_\mu \Phi^\dagger &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \Phi)'^\dagger = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger U^\dagger. \tag{3.181}
\end{aligned}$$

Además

$$\Phi' \approx (1 + iT^i \theta_i) \Phi \Rightarrow \delta \Phi = \Phi' - \Phi \approx iT^i \theta_i \Phi \tag{3.182}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= (\mathcal{D}^\mu \Phi)'^\dagger (\mathcal{D}_\mu \Phi)' - m^2 \Phi'^\dagger \Phi' \\
&= (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger U^\dagger U \mathcal{D}_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger U^\dagger U \Phi \\
&= \mathcal{L}, \tag{3.183}
\end{aligned}$$

y el Lagrangiano, y por consiguiente la acción, es invariante bajo transformaciones gauge locales  $SU(2)$

De la definición de derivada covariante obtenemos el resultado de la ec. (3.82)

$$\mathcal{D}^\mu \rightarrow (\mathcal{D}^\mu)' = U \mathcal{D}^\mu U^\dagger. \tag{3.184}$$

Las matrices  $W^\mu$  transforman como (ver ec. (3.84))

$$W^\mu \xrightarrow{U} (W^\mu)' = UW^\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^\dagger \quad (3.185)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T^i W_i^{\mu} &\approx (1 + i\theta_j T^j) T^k W_k^\mu (1 - i\theta_l T^l) - \frac{i}{g} [i(\partial^\mu \theta_m) T^m (1 - i\theta_n T^n)] \\ &= (T^k + i\theta_j T^j T^k) (1 - i\theta_l T^l) W_k^\mu - \frac{i}{g} [i(\partial^\mu \theta_m) T^m (1 - i\theta_n T^n)] \\ &\approx [T^k - i\theta_l T^k T^l + i\theta_j T^j T^k] W_k^\mu + \frac{1}{g} T^m \partial^\mu \theta_m \\ &= [T^k - i\theta_j (T^k T^j - T^j T^k)] W_k^\mu + \frac{1}{g} T^m \partial^\mu \theta_m \\ &= T^i W_i^\mu - i(\epsilon^{ikj} T^i) W_k^\mu \theta_j + \frac{1}{g} T^i \partial^\mu \theta_i \\ &= T^i \left( W_i^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta_i + \epsilon^{ikj} W_k^\mu \theta_j \right) \end{aligned} \quad (3.186)$$

de donde

$$W_i^\mu \rightarrow W_i^{\prime\mu} \approx W_i^\mu + \frac{1}{g} \partial^\mu \theta_i + \epsilon^{ijk} W_j^\mu \theta_k \quad (3.187)$$

que se reduce al caso Abeliano (3.85) cuando las constantes de estructura son cero. Como era de esperarse cada campo gauge tiene asociado un parámetro de transformación gauge  $\theta_i(x)$ .

Podemos introducir el tensor de intensidad del campo gauge a partir la ec. (3.91)

$$W^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \quad (3.188)$$

De la ec. (3.89)

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - ig(W^\mu W^\nu - W^\nu W^\mu) \\ &= \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - ig[W^\mu, W^\nu]. \end{aligned} \quad (3.189)$$

Usando la ec. (3.176), y la ec. (3.168)

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &= T^i (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - ig [T^i, T^j] W_i^\mu W_j^\nu \\ &= T^i (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - ig (i\epsilon_{ijk} T^k) W_i^\mu W_j^\nu \\ &= T^i (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) + g\epsilon_{ijk} T^i W_j^\mu W_k^\nu \\ &= T^i W_i^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.190)$$

donde

$$W_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu + g\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu, \quad (3.191)$$

que se reduce a la forma usual cuando las constantes de estructura del Grupo son cero. Usando la ec. (3.91)

$$W^{\mu\nu} \rightarrow (W^{\mu\nu})' = UW^{\mu\nu}U^\dagger, \quad (3.192)$$

De modo que la traza de  $W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$

$$\text{Tr}(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) \rightarrow \text{Tr}(W'^{\mu\nu}W'_{\mu\nu}) = \text{Tr}(UW^{\mu\nu}U^\dagger UW_{\mu\nu}U^\dagger) = \text{Tr}(U^\dagger UW^{\mu\nu}U^\dagger UW_{\mu\nu}) = \text{Tr}(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}), \quad (3.193)$$

es invariante. Además Usando la ec. (3.173), podemos obtener el Lagrangiano libre invariante gauge del los campos  $W_i^\mu$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &\equiv -\frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{8} \text{Tr} (\tau^i \tau_j) W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^j \\ &= -\frac{1}{4} \delta_j^i W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^j \\ &= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ \mathcal{L}_W &= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i, \end{aligned} \quad (3.194)$$

que además de los términos cinéticos usuales, da lugar a términos de auto-interacción entre los bosones gauge. Ésta es una característica del carácter no Abelianiano de la simetría  $SU(2)$ .

Por consiguiente, la Acción más general para los campos  $\Phi$  y  $W_i^\mu$  invariante gauge local  $SU(2)$  está dada por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) \quad (3.195)$$

Expandiendo tenemos, teniendo en cuenta la ec. (3.179)<sup>2</sup>,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= (\partial^\mu \Phi^\dagger + ig \Phi^\dagger W^{\mu\dagger}) (\partial_\mu \Phi - ig W_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + ig (\Phi^\dagger W_\mu^\dagger \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) W_\mu \Phi) + g^2 \Phi^\dagger W^{\mu\dagger} W_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ \mathcal{L} &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + ig (\Phi^\dagger W_\mu^\dagger \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) W_\mu \Phi) + g^2 \Phi^\dagger W^\mu W_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i. \end{aligned} \quad (3.196)$$

Usando la ec. (3.178) tenemos

$$\begin{aligned} 2\Phi^\dagger W_\mu \partial^\mu \Phi &= (\phi^- \quad \phi^{0*}) \begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}_\mu \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi^+ \\ \partial^\mu \phi^0 \end{pmatrix} \\ &= (\phi^- W_\mu^3 + \sqrt{2}\phi^{0*} W_\mu^- \quad \sqrt{2}\phi^- W_\mu^+ - \phi^{0*} W_\mu^3) \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi^+ \\ \partial^\mu \phi^0 \end{pmatrix} \\ &= \phi^- (\partial^\mu \phi^+) W_\mu^3 + \sqrt{2}\phi^{0*} (\partial^\mu \phi^+) W_\mu^- + \sqrt{2} (\partial^\mu \phi^0) \phi^- W_\mu^+ - (\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} W_\mu^3 \end{aligned} \quad (3.197)$$

$$2\partial^\mu \Phi^\dagger W_\mu \Phi = (\partial^\mu \phi^-) \phi^+ W_\mu^3 + \sqrt{2} (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^+ W_\mu^- + \sqrt{2} (\partial^\mu \phi^-) \phi^0 W_\mu^+ - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0 W_\mu^3. \quad (3.198)$$

Usando estas ecuaciones, los términos de interacciones entre dos campos escalares y un bosón gauge se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= ig (\Phi^\dagger W_\mu \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) W_\mu \Phi) \\ \mathcal{L}_3 &= g J_{\text{nc}}^\mu W_\mu^3 + (g J_{\text{cc}}^\mu W_\mu^+ + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (3.199)$$

<sup>2</sup>Hasta aquí muchos de los resultados son independientes de la representación de  $SU(2)$  usada y se puede pasar a la sección 3.7

donde  $J_{\text{nc}}^\mu, J_{\text{cc}}^\mu$  son las corrientes neutras y las corrientes cargadas respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} 2 J_{\text{nc}}^\mu &= i [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] - i [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] \\ 2 J_{\text{cc}}^\mu &= i\sqrt{2} [(\partial^\mu \phi^0) \phi^- - (\partial^\mu \phi^-) \phi^0]. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Como

$$\begin{aligned} W^\mu W_\mu &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}_\mu \begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}^\mu \\ &= \frac{1}{4} (W_3^\mu W_\mu^3 + 2W_\mu^+ W^{\mu-}) \cdot I, \end{aligned} \quad (3.201)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &\equiv g^2 \Phi^\dagger W^\mu W_\mu \Phi \\ &= \frac{1}{4} g^2 (W_3^\mu W_\mu^3 + 2W_\mu^+ W^{\mu-}) (\phi^- \phi^+ + \phi^{0*} \phi^0) \\ &= \frac{1}{4} g^2 (W_3^\mu W_\mu^3 \phi^- \phi^+ + W_3^\mu W_\mu^3 \phi^{0*} \phi^0 + 2W_\mu^+ W^{\mu-} \phi^- \phi^+ + 2W_\mu^+ W^{\mu-} \phi^{0*} \phi^0) \end{aligned} \quad (3.202)$$

corresponde a términos de interacción cuárticas entre los campos escalares y los campos gauge.

Usando las ecs. (3.199), (3.202) y (3.194), el Lagrangiano en la ec. (3.196) se puede escribir cómo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\phi^\pm} + \mathcal{L}_{\phi^0} + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_W. \quad (3.203)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\phi^\pm} &= \partial^\mu \phi^\pm \partial_\mu \phi^\mp - m^2 \phi^\pm \phi^\mp \\ \mathcal{L}_{\phi^0} &= \partial^\mu \phi^{0*} \partial_\mu \phi^0 - m^2 \phi^{0*} \phi^0, \end{aligned} \quad (3.204)$$

La Acción definida por el Lagrangiano en ec. (3.203) es invariante bajo el grupo  $U(1)_Q$ , que de acuerdo a la ec. (3.159) es

$$\begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi^{+'} \\ \phi^{0'} \end{pmatrix} = e^{iQ\theta} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (3.205)$$

donde, usando el mismo lenguaje que en el caso no Abelian,  $Q$  es el generador del Grupo  $U(1)_Q$ , que se interpreta como la el operador de carga eléctrica. Esto resultó ser una simetría accidental del Lagrangiano propuesto y sólo se mantiene a nivel global. Si queremos que la carga eléctrica se converve localmente debemos llevar la invarianza gauge abelina gloabal a una local de modo que tengamos el Grupo gauge local  $SU(2) \times U(1)$  correspondiente a un grupo semisimple

### 3.6. Invarianza gauge local para un grupo semisimple

El superíndice en el doblete escalar puede ser interpretado como carga eléctrica (en unidades de  $e$ ) si bajo el operador diagonal de carga

$$\hat{Q} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_+ & 0 \\ 0 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_+ \phi^+ \\ q_0 \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (+1)\phi^+ \\ (0)\phi^0 \end{pmatrix} \quad (3.206)$$

de modo que

$$Q\Phi = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi \quad (3.207)$$

En esta sección impondremos que las transformaciones bajo el grupo semisimple  $SU(2) \times U(1)_Y \supset U(1)_Q$ , dejen invariante la Acción definida por el Lagrangiano en ec. (3.195).

Para el caso Abelianos usaremos la misma estructura de la derivada covariante en ec. (3.175) donde el coeficiente del campo gauge contiene el acoplamiento gauge y el generador de las transformaciones correspondientes. El doblete escalar complejo debe transformar bajo  $U(1)_Y$  como

$$\phi \xrightarrow{U(1)_Y} \Phi' = e^{i\alpha Y} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \approx \Phi + i\alpha Y_\Phi \Phi, \quad (3.208)$$

de modo que la hipercarga  $Y$  debe ser la misma para las dos componentes del doblete.

El efecto de la transformación completa  $SU(2) \times U(1)_Y$  es

$$\Phi \xrightarrow{SU(2) \times U(1)_Y} \Phi' = e^{i(\theta_j T^j + \alpha Y \cdot I)} \Phi. \quad (3.209)$$

Para que la Acción definida por el Lagrangiano en ec. (3.154) sea invariante gauge local bajo  $SU(2) \times U(1)_Y$ , debemos cambiar la derivada normal por la derivada covariante:

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\rightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - igT^i W_i^\mu - ig'Y B^\mu, \\ &= \partial^\mu - igT^1 W_1^\mu - igT^2 W_2^\mu - igT^3 W_3^\mu - ig'Y B^\mu, \\ &= \partial^\mu - i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.210)$$

y, adicionar todos los términos invariantes gauge asociados a los campos  $\Phi$ ,  $W^\mu$ , y  $B^\mu$ :

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \quad (3.211)$$

Fijaremos el valor de la hipercarga  $Y_\Phi$ , tal que el Lagrangiano anterior contenga el Lagrangiano invariante gauge local bajo  $U(1)_Q$  dado en la ec. (3.161) Expandiendo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= [\partial^\mu \Phi^\dagger + i\Phi^\dagger (gT^i W_i^\mu + g'Y B^\mu)] [\partial_\mu \Phi - i(gT^i W_\mu^i + g'Y B_\mu) \Phi] - m^2 \Phi^\dagger \Phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + i\Phi^\dagger (gT^i W_i^\mu + g'Y B^\mu) \partial_\mu \Phi - i\partial^\mu \Phi^\dagger (gT^i W_\mu^i + g'Y B_\mu) \Phi \\ &\quad + \Phi^\dagger (gT^i W_i^\mu + g'Y B^\mu) (gT^i W_\mu^i + g'Y B_\mu) \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.212)$$

Las nuevas corrientes se puede obtener de:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset i\Phi^\dagger \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix} \partial^\mu \Phi \\ &\quad - i\partial^\mu \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix} \Phi \\ &\quad + \Phi^\dagger \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B^\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B^\mu \end{pmatrix} \Phi \end{aligned} \quad (3.213)$$

Para las corrientes involucrando tres campos tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & i \left( \phi^- \left( \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} g \phi^{0*} W_\mu^- - \frac{1}{\sqrt{2}} g \phi^- W_\mu^+ + \phi^{0*} \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) \right) \partial^\mu \Phi \\
& - i \left( \partial^\mu \phi^- \left( \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} g \partial^\mu \phi^{0*} W_\mu^- - \frac{1}{\sqrt{2}} g \partial^\mu \phi^- W_\mu^+ + \partial^\mu \phi^{0*} \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) \right) \Phi \\
\supset & i \{ [\phi^- \left( \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} g \phi^{0*} W_\mu^-] \partial^\mu \phi^+ + [\frac{1}{\sqrt{2}} g \phi^- W_\mu^+ + \phi^{0*} \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right)] \partial^\mu \phi^0 \} \\
& - i \{ [\partial^\mu \phi^- \left( \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} g \partial^\mu \phi^{0*} W_\mu^-] \phi^+ + [\frac{1}{\sqrt{2}} g \partial^\mu \phi^- W_\mu^+ + \partial^\mu \phi^{0*} \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right)] \phi^0 \}
\end{aligned} \tag{3.214}$$

Las interacciones neutras de tres campos corresponden a

$$\mathcal{L}_{\text{nc}} = i [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] \left( \frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) + i [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] \left( -\frac{g}{2} W_\mu^3 + g' Y_\Phi B_\mu \right) \tag{3.215}$$

Como el fotón no se acopla con partículas neutras definimos

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \tag{3.216}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{nc}} = & i [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] \left[ \frac{g}{2} (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) + g' Y_\Phi (-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \right] \\
& + i [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] \left[ -\frac{g}{2} (\cos \theta_W Z_\mu + \sin \theta_W A_\mu) + g' Y_\Phi (-\sin \theta_W Z_\mu + \cos \theta_W A_\mu) \right] \\
= & i [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] \left[ \left( \frac{1}{2} g \cos \theta_W - g' Y_\Phi \sin \theta_W \right) Z_\mu + \left( \frac{1}{2} g \sin \theta_W + g' Y_\Phi \cos \theta_W \right) A_\mu \right] \\
& + i [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] \left[ \left( -\frac{1}{2} g \cos \theta_W - g' Y_\Phi \sin \theta_W \right) Z_\mu + \left( -\frac{1}{2} g \sin \theta_W + g' Y_\Phi \cos \theta_W \right) A_\mu \right]
\end{aligned} \tag{3.217}$$

Comparando con el Lagrangiano para la interacción electromagnética en la ec. (3.95) ( $g = e$ )

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} \supset ie(\phi^- \partial^\mu \phi^+ - \phi^+ \partial^\mu \phi^-) A_\mu \tag{3.218}$$

Tenemos las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} g \sin \theta_W + Y_\Phi g' \cos \theta_W &= e \\
-\frac{1}{2} g \sin \theta_W + Y_\Phi g' \cos \theta_W &= 0
\end{aligned} \tag{3.219}$$

Con solución

$$g \sin \theta_W = e \qquad 2Y_\Phi g' \cos \theta_W = e \tag{3.220}$$

Fijando

$$Y_\Phi = \frac{1}{2} \tag{3.221}$$

tenemos

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \tag{3.222}$$

sustituyendo en (3.219) y teniendo en cuenta la ec. (3.207)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + Y_\Phi &= +1 \\ -\frac{1}{2} + Y_\Phi &= 0 \\ T_3 + Y_\Phi &= Q\end{aligned}\tag{3.223}$$

Podemos escribir el operador de carga en términos del isospín y la hipercarga, relación que se conoce como la fórmula de Gell-man-Nishijima

$$\hat{Q} = T_3 + Y\tag{3.224}$$

Reemplazando la ec. (3.222) en ec. (3.217)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{nc}} &= ie [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] \left[ \frac{1}{2} + Y_\Phi \right] A_\mu \\ &+ ie [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] \left[ \frac{\cos \theta_W}{2 \sin \theta_W} - \frac{Y_\Phi \sin \theta_W}{\cos \theta_W} \right] Z_\mu \\ &- ie [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] \left[ \frac{\cos \theta_W}{2 \sin \theta_W} + \frac{Y_\Phi \sin \theta_W}{\cos \theta_W} \right] Z_\mu\end{aligned}\tag{3.225}$$

Usando  $Y_\Phi = 1/2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{nc}} &= ie [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] A_\mu \\ &+ i \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] (\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) Z_\mu \\ &- i \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] Z_\mu \\ &= ie [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] A_\mu \\ &+ i \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] (1 - 2 \sin^2 \theta_W) Z_\mu \\ &- i \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0] Z_\mu \\ &= e J_{\text{EM}}^\mu A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} J_{\text{NC}}^\mu Z_\mu\end{aligned}\tag{3.226}$$

donde  $J_{\text{EM}}^\mu$  está dado por la ec. (3.55)

$$J_{\text{EM}}^\mu = i(\phi^- \partial^\mu \phi^+ - \phi^+ \partial^\mu \phi^-).\tag{3.227}$$

y

$$J_{\text{NC}}^\mu = i [\phi^- (\partial^\mu \phi^+) - (\partial^\mu \phi^-) \phi^+] (1 - 2 \sin^2 \theta_W) - i [(\partial^\mu \phi^0) \phi^{0*} - (\partial^\mu \phi^{0*}) \phi^0].\tag{3.228}$$

Otra forma de obtener el mismo resultado es escribiendo el Lagrangiano de forma más compacta partiendo de la ec. (3.212), cuya parte diagonal es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\supset \left[ i\Phi^\dagger \left( g \frac{\tau^3}{2} W_3^\mu + g' Y \cdot IB^\mu \right) \partial_\mu \Phi - i\partial^\mu \Phi^\dagger \left( g \frac{\tau^3}{2} W_3^\mu + g' Y \cdot IB^\mu \right) \Phi \right] \\ &\supset \left[ i\Phi^\dagger \left( g \frac{\tau^3}{2} W_3^\mu + g' Y \cdot IB^\mu \right) \partial_\mu \Phi + \text{h.c} \right]\end{aligned}\tag{3.229}$$

Usando la ec. (3.216)

$$\begin{aligned} gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu &= gT^3 (\cos \theta_W Z^\mu + \sin \theta_W A^\mu) + g'Y (-\sin \theta_W Z^\mu + \cos \theta_W A^\mu) \\ &= (gT^3 \sin \theta_W + g'Y \cos \theta_W) A^\mu + (gT^3 \cos \theta_W - g'Y \sin \theta_W) Z^\mu \end{aligned}$$

Para que Lagrangiano incluya la conservación local de carga eléctrica debe contener el Lagrangiano de la ec.(3.161) (el término en  $e^2$  se analiza en el problema 3. 7). Entonces

$$gT^3 \sin \theta_W + g'Y \cos \theta_W = eQ \quad (3.230)$$

Esto se consigue si

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \quad T^3 + Y = Q \quad (3.231)$$

de modo que

$$Y_\Phi = \frac{1}{2} \quad (3.232)$$

Entonces

$$\begin{aligned} gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu &= eQA^\mu + e \left( T^3 \frac{\cos \theta_W}{\sin \theta_W} - Y \frac{\sin \theta_W}{\cos \theta_W} \right) Z^\mu \\ &= eQA^\mu + \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T^3 \cos^2 \theta_W - Y \sin^2 \theta_W) Z^\mu \\ &= eQA^\mu + \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} [T^3 - (T^3 + Y) \sin^2 \theta_W] Z^\mu \\ &= eQA^\mu + \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) Z^\mu \end{aligned} \quad (3.233)$$

Entonces

$$\mathcal{L} \supset ie\Phi^\dagger Q \partial_\mu \Phi A^\mu + i \frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} \Phi^\dagger (\tau^3 - 2Q \sin^2 \theta_W) \partial_\mu \Phi Z^\mu + \text{h.c} \quad (3.234)$$

Expandiendo obtenemos la ec. (3.226)

$$\mathcal{L} \supset eJ_{\text{EM}}^\mu A_\mu + \frac{e}{2 \sin \theta_W \cos \theta_W} J_{\text{NC}}^\mu Z_\mu \quad (3.235)$$

Teniendo en cuenta las interacciones de cuatro campos, ver ec.(3.278), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \Phi^\dagger (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu) (gT^3 W_\mu^3 + g'Y B_\mu) \Phi \\ &= \Phi^\dagger (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu) \Phi \\ &= \Phi^\dagger \left[ eQA^\mu + \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) Z^\mu \right]^2 \Phi \end{aligned} \quad (3.236)$$

Entonces

$$j_{\text{EM}}^\mu = i(\phi^- \partial^\mu \phi^+ - \phi^+ \partial^\mu \phi^-) + 2e\phi^- \phi^+ A^\mu \quad (3.237)$$

que corresponde a la ec. (3.98).

A este nivel todos los campos gauge son no masivos. Note que las corrientes cargadas son las mismas que en la sección 3.5.

### 3.7. $\Phi$ como un triplete de $SU(2)$

Si  $\Phi$  transforma como un triplete de  $SU(2)$ <sup>3</sup>

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{++} \\ \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (3.238)$$

siendo  $\phi_i$  campos complejos, el Lagrangiano en la ec. (3.154) queda invariante bajo las transformación gauge local

$$\Phi \rightarrow \Phi' = X\Phi = \exp(i\Sigma^i\theta_i)\Phi \quad (3.239)$$

donde  $\Sigma_i$  son la matrices  $3 \times 3$  generadores de  $SU(2)$  en la representación adjunta

$$(\Sigma_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \quad (3.240)$$

Debemos comprobar que

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j] &= i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \\ [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm} \end{aligned} \quad (3.241)$$

Ya que

$$\begin{aligned} (\Sigma_i\Sigma_j)_{lm} &= (\Sigma_i)_{lk}(\Sigma_j)_{km} = -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jkm} = \epsilon_{ilk}\epsilon_{jmk} = \delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj} \\ -(\Sigma_j\Sigma_i)_{lm} &= -(\Sigma_j)_{lk}(\Sigma_i)_{km} = \epsilon_{jlk}\epsilon_{ikm} = -\epsilon_{jlk}\epsilon_{imk} = -\delta_{ji}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{li} \end{aligned} \quad (3.242)$$

Entonces

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= (\Sigma_i\Sigma_j - \Sigma_j\Sigma_i)_{lm} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \\ &= i\epsilon_{ijk}(-i\epsilon_{klm}) \\ &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm} \end{aligned} \quad (3.243)$$

Algunas propiedades de  $\Sigma$  son

$$\begin{aligned} [(\Sigma_i)_{jk}]^\dagger &= [(\Sigma_i)_{kj}]^* = (-i\epsilon_{ikj})^* = i\epsilon_{ikj} = -i\epsilon_{ijk} = (\Sigma_i)_{jk} \\ &\rightarrow \Sigma_i^\dagger = \Sigma_i \end{aligned} \quad (3.244)$$

$$\text{Tr } \Sigma_i = \sum_j (\Sigma_i)_{jj} = \sum_j i\epsilon_{ijj} = 0 \quad (3.245)$$

Por lo que  $\Sigma_i$  es una representación del grupo  $SU(2)$  en términos de matrices  $3 \times 3$ . Usando la ec. (3.242)

$$\text{Tr}(\Sigma_i\Sigma_j) = \sum_k (\Sigma_i\Sigma_j)_{kk} = \sum_k (\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{jk}) = 3\delta_{ij} - \delta_{ij} = 2\delta_{ij} \quad (3.246)$$

<sup>3</sup> $\Phi$  también puede escribirse como una matriz  $2 \times 2$ .

Expandiendo la ec. (3.239), obtenemos el resultado de la ec. (3.182)

$$\begin{aligned}\delta\Phi &\approx i\Sigma_i\theta^i\Phi \\ \delta\phi^i &\approx (i\Sigma_k\theta^k\Phi)^i = i(\Sigma_k)_{ij}\phi^j\theta^k = i(-i\epsilon_{kij})\phi^j\theta^k = \epsilon_{ijk}\phi^j\theta^k = -(\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\phi})^i \\ \delta\boldsymbol{\phi} &\approx -\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\phi}\end{aligned}\tag{3.247}$$

Esto corresponde a una rotación en el espacio de tres dimensiones de isospín.  $|\boldsymbol{\theta}|$  corresponde al ángulo de rotación, y  $\boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|$  es el eje de rotación [24]. El carácter no Abelianiano del grupo proviene del hecho de que el producto vectorial en el espacio de isospín es no conmutativo.

Bajo la transformación (3.239) o su versión infinitesimal anterior el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi.\tag{3.248}$$

es invariante gauge local, donde

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - igW^\mu = \partial^\mu - ig\Sigma^i W_i^\mu$$

y

$$\begin{aligned}W^\mu &= \Sigma^i W_i^\mu \\ (W^\mu)_{jk} &= -i\epsilon_{ijk}W_i^\mu\end{aligned}\tag{3.249}$$

y sólo contiene entradas no diagonales.

$$(W^\mu)_{12} = -i\epsilon_{312}W_3^\mu = -iW_3^\mu\tag{3.250}$$

La ec. (3.187) se mantiene igual

$$\begin{aligned}\delta W_i^{\mu} &\approx \frac{1}{g}\partial^\mu\theta_i + \epsilon^{ijk}W_j^\mu\theta_k \\ \delta \mathbf{W}^\mu &\approx \frac{1}{g}\partial^\mu\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W}^\mu \times \boldsymbol{\theta}\end{aligned}\tag{3.251}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\mu\Phi &= (\partial^\mu - ig\Sigma^i W_i^\mu)\Phi \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= (\delta_{jk}\partial^\mu - ig(\Sigma^i)_{jk}W_i^\mu)\phi_k \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= (\delta_{jk}\partial^\mu - g\epsilon_{ijk}W_i^\mu)\phi_k \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= (\delta_{jk}\partial^\mu + g\epsilon_{jik}W_i^\mu)\phi_k \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= \delta_{jk}\partial^\mu\phi_k + g(\mathbf{W}^\mu \times \boldsymbol{\phi})_j\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{D}^\mu\boldsymbol{\phi} = \partial^\mu\boldsymbol{\phi} + g\mathbf{W}^\mu \times \boldsymbol{\phi}\tag{3.252}$$

Además

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger &= \Phi^\dagger(\partial^\mu + ig\Sigma^i W_i^\mu) \\ [(\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger]_j &= (\delta_{jk}\partial^\mu\phi_k^* + g\epsilon_{ijk}\phi_k^*W_i^\mu) \\ [(\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger]_j &= (\delta_{jk}\partial^\mu\phi_k^* + g\epsilon_{jki}\phi_k^*W_i^\mu)\end{aligned}\tag{3.253}$$

$$(\mathcal{D}^\mu \phi)^\dagger = \partial^\mu \phi^* + g \phi^* \times \mathbf{W}^\mu \quad (3.254)$$

La definición de  $W^{\mu\nu}$  queda

$$W^{\mu\nu} = \Sigma^i W_i^{\mu\nu} \quad (3.255)$$

con  $W_i^{\mu\nu}$  dado por la ec. (3.191)

$$\mathbf{W}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu + g \mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu \quad (3.256)$$

Sin embargo, debido a la ec. (3.246)

$$-\frac{1}{8} \text{Tr}(W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \quad (3.257)$$

De acuerdo a la ec. (3.192),  $W^{\mu\nu}$  transforma como

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} &\rightarrow (W^{\mu\nu})' = X W^{\mu\nu} X^\dagger \\ &\approx (1 + i \Sigma^j \theta_j) W^{\mu\nu} (1 - i \Sigma^k \theta_k) \\ &\approx W^{\mu\nu} + i \theta_j \Sigma^j W^{\mu\nu} - i \theta_j W^{\mu\nu} \Sigma^j \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Sigma^i W_i^{\mu\nu} &\rightarrow (W^{\mu\nu})' = \Sigma^i W_i^{\mu\nu} + i \theta_j \Sigma^j \Sigma^i W_i^{\mu\nu} - i \theta_j \Sigma^i W_i^{\mu\nu} \Sigma^j \\ &= (\Sigma^i + i \theta_j \Sigma^j \Sigma^i - i \theta_j \Sigma^i \Sigma^j) W_i^{\mu\nu} \\ &= (\Sigma^i - i \theta_j [\Sigma^i, \Sigma^j]) W_i^{\mu\nu} \\ &= (\Sigma^i - i \theta_j (i \epsilon_{ijk} \Sigma^k)) W_i^{\mu\nu} \\ &= \Sigma^i W_i^{\mu\nu} + \theta_j \epsilon_{ijk} \Sigma^k W_i^{\mu\nu} \\ &= \Sigma^i W_i^{\mu\nu} + \Sigma^i \theta_j \epsilon_{kji} W_k^{\mu\nu} \\ &= \Sigma^i W_i^{\mu\nu} - \Sigma^i \theta_j \epsilon_{jki} W_k^{\mu\nu} \end{aligned}$$

entonces

$$\delta(\mathbf{W}^{\mu\nu}) = -\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \quad (3.258)$$

y  $\mathbf{W}^{\mu\nu}$  transforma como el campo  $\phi$ .

El Lagrangiano invariante gauge local es entonces, a partir de la ec. (3.196) que sigue siendo válida si tenemos en cuante la nueva traza en ec. (3.257)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi + ig (\Phi^\dagger W_\mu \partial^\mu \Phi - (\partial^\mu \Phi^\dagger) W_\mu \Phi) + g^2 \Phi^\dagger W^\mu W_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{8} \text{Tr}(W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) \\ &= \partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + ig [\phi^{*i} (\Sigma_k)_{ij} W_\mu^k \partial^\mu \phi_j - (\partial^\mu \phi^{*i}) (\Sigma_k)_{ij} W_\mu^k \phi_j] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} (\Sigma_k)_{ij} (\Sigma_l)_{jm} W_k^\mu W_\mu^l \phi_m - m^2 \phi^{*i} \phi_i - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi + g [\phi^{*i} \epsilon_{kij} W_\mu^k \partial^\mu \phi_j - (\partial^\mu \phi^{*i}) \epsilon_{kij} W_\mu^k \phi_j] \\ &\quad - g^2 \phi^{*i} \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj} W_k^\mu W_\mu^l \phi_m - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^{*i} \epsilon_{ikj} W_\mu^k \partial^\mu \phi_j - (\partial^\mu \phi^{*i}) \epsilon_{ikj} W_\mu^k \phi_j] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} \epsilon_{kij} \epsilon_{lmj} W_k^\mu W_\mu^l \phi_m - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \end{aligned} \quad (3.259)$$

donde

$$\begin{aligned}
W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i &= (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu + g \epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu)(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i + g \epsilon_{ilm}W_\mu^l W_\nu^m) \\
&= (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu)(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) \\
&\quad + g[\epsilon_{ilm}(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu)W_\mu^l W_\nu^m + \epsilon_{ijk}(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i)W_j^\mu W_k^\nu] \\
&\quad + g^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^l W_\nu^m \\
&= (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu)(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) + 2g \epsilon_{ijk}(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i)W_j^\mu W_k^\nu \\
&\quad + g^2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^l W_\nu^m
\end{aligned} \tag{3.260}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} = 0 \tag{3.261}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} \right] &= -\frac{1}{4} \partial_\mu \left[ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \right] \\
&= -\partial_\mu (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) \\
&\quad - \frac{1}{4} \partial_\mu \left\{ 2g \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} [\epsilon_{ijk}(\partial_\alpha W_\beta^i - \partial_\beta W_\alpha^i)] W_j^\alpha W_k^\beta \right\} \\
&= -\partial_\mu (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) \\
&\quad - \frac{1}{4} \partial_\mu \left\{ 2g [\epsilon_{ijk}(\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha})] W_j^\alpha W_k^\beta \right\} \\
&= -\partial_\mu (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - \frac{1}{4} \partial_\mu \left\{ 2g (\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu - \epsilon_{ijk} W_j^\nu W_k^\mu) \right\} \\
\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} \right] &= -\partial_\mu (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - \frac{1}{4} \partial_\mu \left\{ 2g (\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu - \epsilon_{ikj} W_k^\nu W_j^\mu) \right\} \\
&= -\partial_\mu (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - \frac{1}{4} \partial_\mu \left\{ 2g (\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu + \epsilon_{ijk} W_k^\nu W_j^\mu) \right\} \\
&= -\partial_\mu (\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - \partial_\mu (g \epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu) \\
&= -\partial_\mu [(\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) + g \mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu]_i
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} \right] = -\partial_\mu W_i^{\mu\nu} = -\partial_\mu (\mathbf{W}^{\mu\nu})_i \tag{3.262}$$

De manera que al igual que en el caso Abeliano

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu W_\nu^i)} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i = 4W_i^{\mu\nu} \tag{3.263}$$

De otro lado, usando la técnica, por ejemplo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial W_\nu^i} [\epsilon_{ilm}(\partial^\mu W_i^\nu)W_\mu^l W_\nu^m] &= \frac{\partial}{\partial W_\nu^i} [\epsilon_{ilm}(\partial^\nu W_i^\mu)W_\nu^l W_\mu^m] \\
&= \epsilon_{nim}(\partial^\nu W_n^\mu) \left[ \frac{\partial W_\nu^i}{\partial W_\nu^i} \right] W_\mu^m + \epsilon_{nli}(\partial^\mu W_n^\nu)W_\mu^l \left[ \frac{\partial W_\nu^i}{\partial W_\nu^i} \right] \\
&= \epsilon_{nim}(\partial^\nu W_n^\mu)W_\mu^m + \epsilon_{nli}(\partial^\mu W_n^\nu)W_\mu^l
\end{aligned} \tag{3.264}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} &= g [\phi^{*n} \epsilon_{nij} \partial^\nu \phi_j - (\partial^\nu \phi^{*n}) \epsilon_{nij} \phi_j] - g^2 (\phi^{*n} \epsilon_{inj} \epsilon_{lmj} W_l^\nu \phi_m + \phi^{*n} \epsilon_{knj} \epsilon_{imj} W_k^\nu \phi_m) \\
&\quad + \frac{2g}{4} [\epsilon_{nji} (\partial^\mu W_n^\nu - \partial^\nu W_n^\mu) W_\mu^j + \epsilon_{nik} (\partial^\nu W_n^\mu - \partial^\mu W_n^\nu) W_\mu^k] \\
&\quad + \frac{g^2}{4} (\epsilon_{nik} \epsilon_{nlm} W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m + \epsilon_{nji} \epsilon_{nlm} W_j^\mu W_\mu^l W_m^\nu + \epsilon_{nj k} \epsilon_{nim} W_j^\nu W_k^\mu W_\mu^m + \epsilon_{nj k} \epsilon_{nli} W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^l) \\
\\
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} &= -g [\epsilon_{nji} \phi^{*n} \partial^\nu \phi_j - \epsilon_{nji} (\partial^\nu \phi^{*n}) \phi_j] - g^2 [\phi^{*n} \epsilon_{inj} (\epsilon_{lmj} W_l^\nu \phi_m) + \phi_m \epsilon_{imj} (\epsilon_{knj} W_k^\nu \phi^{*n})] \\
&\quad + \frac{2g}{4} [\epsilon_{nji} (\partial^\mu W_n^\nu - \partial^\nu W_n^\mu) W_\mu^j - \epsilon_{nik} (\partial^\mu W_n^\nu - \partial^\nu W_n^\mu) W_\mu^k] \\
&\quad + \frac{g^2}{4} (\epsilon_{nik} \epsilon_{nlm} W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m + \epsilon_{nki} \epsilon_{nml} W_k^\mu W_\mu^m W_l^\nu + \epsilon_{nlm} \epsilon_{nik} W_l^\nu W_m^\mu W_\mu^k + \epsilon_{nml} \epsilon_{nki} W_m^\mu W_l^\nu W_\mu^k) \\
\\
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} &= -g [\epsilon_{nji} \phi^{*n} \partial^\nu \phi_j - \epsilon_{nji} (\partial^\nu \phi^{*n}) \phi_j] - g^2 [\phi^{*n} \epsilon_{inj} (\epsilon_{lmj} W_l^\nu \phi_m) + \phi_m \epsilon_{imj} (\epsilon_{knj} W_k^\nu \phi^{*n})] \\
&\quad + \frac{2g}{4} [\epsilon_{nji} (\partial^\mu W_n^\nu - \partial^\nu W_n^\mu) W_\mu^j + \epsilon_{nji} (\partial^\mu W_n^\nu - \partial^\nu W_n^\mu) W_\mu^j] + g^2 \epsilon_{nik} \epsilon_{nlm} W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m \\
&= -g [\epsilon_{nji} \phi^{*n} \partial^\nu \phi_j - \epsilon_{nji} (\partial^\nu \phi^{*n}) \phi_j] - g^2 [\phi^{*n} \epsilon_{inj} (\epsilon_{lmj} W_l^\nu \phi_m) + \phi_m \epsilon_{imj} (\epsilon_{knj} W_k^\nu \phi^{*n})] \\
&\quad + g [\epsilon_{nji} (\partial^\mu W_n^\nu - \partial^\nu W_n^\mu) W_\mu^j] + g^2 \epsilon_{nik} \epsilon_{nlm} W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m \\
\\
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} &= -g (\phi^* \times \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \times \phi)_i - g^2 [\epsilon_{inj} \phi^{*n} (\mathbf{W}^\nu \times \phi)_j + \epsilon_{imj} \phi_m (\mathbf{W}^\nu \times \phi^*)_j] \\
&\quad + g [(\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \times \mathbf{W}_\mu]_i + g^2 \epsilon_{nik} (\mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}^\mu)_n W_\mu^k \\
&= -g (\phi^* \times \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \times \phi)_i + g^2 [\epsilon_{ijn} (\mathbf{W}^\nu \times \phi)_j \phi^{*n} + \epsilon_{ijm} (\mathbf{W}^\nu \times \phi^*)_j \phi_m] \\
&\quad + g [(\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \times \mathbf{W}_\mu]_i - g^2 \epsilon_{nki} (\mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}^\mu)_n W_\mu^k \\
\\
-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} &= -g (\phi^* \times \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \times \phi)_i + g^2 [(\mathbf{W}^\nu \times \phi) \times \phi^* + (\mathbf{W}^\nu \times \phi^*) \times \phi]_i \\
&\quad + g [(\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \times \mathbf{W}_\mu]_i - g^2 [(\mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}^\mu) \times \mathbf{W}_\mu]_i \\
&= -g \{ \phi^* \times \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \times \phi - g [(\mathbf{W}^\nu \times \phi^*) \times \phi + (\mathbf{W}^\nu \times \phi) \times \phi^*] \}_i \\
&\quad - g \{ [(\partial^\nu \mathbf{W}^\mu - \partial^\mu \mathbf{W}^\nu) + g \mathbf{W}^\nu \times \mathbf{W}^\mu] \times \mathbf{W}_\mu \}_i
\end{aligned}$$

Finalmente

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} = -g \{ \phi^* \times \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \times \phi - g [(\mathbf{W}^\nu \times \phi^*) \times \phi + (\mathbf{W}^\nu \times \phi) \times \phi^*] \}_i - g (\mathbf{W}^{\nu\mu} \times \mathbf{W}_\mu)_i \tag{3.265}$$

Combinando las ecuaciones (3.265) y (3.262) en la ec. (3.261), tenemos

$$\begin{aligned}
-\partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} + g \mathbf{W}^{\mu\nu} \times \mathbf{W}_\mu &= g \{ \phi^* \times \partial^\nu \phi + \partial^\nu \phi^* \times \phi - g [ (\mathbf{W}^\nu \times \phi^*) \times \phi + (\mathbf{W}^\nu \times \phi) \times \phi^* ] \} \\
\partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} - g \mathbf{W}^{\mu\nu} \times \mathbf{W}_\mu &= -g [ \phi^* \times (\partial^\nu \phi + g \mathbf{W}^\nu \times \phi) - (\partial^\nu \phi^* + g \phi^* \times \mathbf{W}^\nu) \times \phi ] \\
\partial^\mu \mathbf{W}_{\mu\nu} + g \mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}_{\mu\nu} &= -g [ \phi^* \times (\partial_\nu \phi + g \mathbf{W}_\nu \times \phi) - (\partial_\nu \phi^* + g \phi^* \times g \mathbf{W}_\nu) \times \phi ]
\end{aligned} \tag{3.266}$$

Ya que

$$\mathcal{D}^\mu \mathbf{W}_{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{W}_{\mu\nu} + g \mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}_{\mu\nu}, \tag{3.267}$$

de las ecs. (3.252) y (3.254)

$$\mathcal{D}^\mu \mathbf{W}_{\mu\nu} = -g [ \phi^* \times \mathcal{D}_\nu \phi - (\mathcal{D}_\nu \phi)^\dagger \times \phi ] \equiv -g \mathbf{j}_\nu \tag{3.268}$$

Note que si  $\phi$  es real

$$\mathcal{D}^\mu \mathbf{W}_{\mu\nu} = 2g (\mathcal{D}_\nu \phi) \times \phi \tag{3.269}$$

Este caso corresponde al de una simetría  $SO(3)$  [24].

Mientras que las ecuaciones de Maxwell son lineales en  $A^\mu$ , las ecuaciones (3.268) es no lineal en  $\mathbf{W}^\mu$ . En usencia de materia ( $\phi \rightarrow 0$ ) las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{3.270}$$

indicando que no hay término de fuente para el campo electromagnético. En el caso no Abelianiano

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = -g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \tag{3.271}$$

indicando que el campo  $\mathbf{W}^{\mu\nu}$  actúa como la fuente de si mismo. Esto se debe a que el campo  $W^\mu$  lleva carga de isospín, a diferencia del campo  $A^\mu$  que no lleva carga eléctrica.

De otro lado las ecuaciones homogéneas de Maxwell dan lugar a que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  y a la ausencia de monopolos magnéticos. En este caso se puede demostrar que

$$\mathcal{D}^\lambda \mathbf{W}^{\mu\nu} + \mathcal{D}^\nu \mathbf{W}^{\lambda\mu} + \mathcal{D}^\mu \mathbf{W}^{\nu\lambda} = 0, \tag{3.272}$$

se sigue que  $\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} \neq 0$ , donde  $\vec{\mathbf{B}}$  es el *isovector de inducción magnética*. Esto da lugar a la existencia de monopolos magnéticos de isospín.

Al igual que en el caso Abelianiano, sin embargo, el campo  $\mathbf{W}^\mu$  sigue siendo sin masa.

Aunque la teoría que hemos desarrollado es puramente matemática, comparte muchas cosas en común con las simetrías gauge no abelianas usadas en la construcción del Modelo Estándar de las partículas elementales.

## 3.8. Problemas

3.1 Compruebe si es posible construir un doblete escalar donde ambas campos sean cargados respetando la invarianza  $SU(2) \times U(1)_Y$ . La solución es  $Y = 3/2$

3.2 Demuestre que la ecuación de movimiento en ec. (3.100)

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + ie \partial_\mu (A^\mu \phi) + ie A^\mu \partial_\mu \phi - e^2 A^\mu A_\mu \phi = 0$$

puede escribirse como

$$(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}^\mu - m^2) \phi = 0 \quad (3.273)$$

es decir, partiendo de la ecuación de movimiento para el campo libre con el reemplazo  $\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu$ .

3.3 Encuentre las soluciones en la regiones I y II para el caso de una barrera baja  $eV - E < m$ .

3.4 A partir del Lagrangiano en ec. (3.142)

3.5 Demuestre que  $\mathcal{D}'_\mu{}^n \phi' = U(\mathcal{D}_\mu{}^n \phi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_\mu{}^n \phi' &= (U \mathcal{D}_\mu U^\dagger)^n U \phi \\ &= \underbrace{U \mathcal{D}_\mu U^\dagger U \mathcal{D}_\mu U^\dagger \dots U \mathcal{D}_\mu U^\dagger U \mathcal{D}_\mu U^\dagger U \phi}_{n\text{-factors}} \\ &= U(\mathcal{D}_\mu{}^n \phi) \end{aligned} \quad (3.274)$$

3.6 Muestre que

a)

$$\tilde{\Phi} \equiv i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (3.275)$$

b) el Lagrangiano (3.156) puede escribirse también como

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \tilde{\Phi}^\dagger \partial_\mu \tilde{\Phi} - m^2 \tilde{\Phi}^\dagger \tilde{\Phi} \quad (3.276)$$

De modo que  $\Phi$  y  $\tilde{\Phi}$  pertenecen a la misma representación de  $SU(2)$ <sup>4</sup>

c) el Lagrangiano (3.156) puede escribirse también como

$$\mathcal{L} = \epsilon_{ab} \partial^\mu \tilde{\Phi}^a \partial_\mu \Phi^b - m^2 \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a \Phi^b \quad (3.277)$$

3.7 Muestre que los términos de interacción de 4 campos en la ec.(3.212) incluyen

$$\mathcal{L} \supset e^2 \phi^- \phi^+ A^\mu A_\mu \quad (3.278)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \Phi^\dagger (gT^i W_i^\mu + g'Y B^\mu) (gT^i W_\mu^i + g'Y B_\mu) \Phi \\ &= \Phi^\dagger [(gT^1 W_1^\mu + gT^2 W_2^\mu) + gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu] [(gT^1 W_\mu^1 + gT^2 W_\mu^2) + gT^3 W_\mu^3 + g'Y B_\mu] \Phi \\ &= \Phi^\dagger [(gT^1 W_1^\mu + gT^2 W_2^\mu)^2 + (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu)^2 \\ &\quad + (gT^1 W_1^\mu + gT^2 W_2^\mu)(gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu) + (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu)(gT^1 W_\mu^1 + gT^2 W_\mu^2)] \Phi \\ &= \Phi^\dagger [(gT^1 W_1^\mu + gT^2 W_2^\mu)^2 + (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu)^2 \\ &\quad + g^2 \{T^1, T^3\} W_1^\mu W_\mu^3 + g^2 \{T^2, T^3\} W_2^\mu W_\mu^3 + 2gg'T^1 Y W_1^\mu B_\mu + 2gg'T^2 Y W_2^\mu B_\mu] \Phi \\ &= \Phi^\dagger [(gT^1 W_1^\mu + gT^2 W_2^\mu)^2 + (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu)^2 + 2gg'(T^1 W_1^\mu + T^2 W_2^\mu) Y B_\mu] \Phi \end{aligned} \quad (3.279)$$

<sup>4</sup>En  $SU(2)$  las representaciones  $\mathbf{2}$  y  $\bar{\mathbf{2}}$  son equivariantes

Entonces, usando la ec.(3.233)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\supset \Phi^\dagger (gT^3 W_3^\mu + g'Y B^\mu)^2 \Phi \\
&= \Phi^\dagger \left[ eQ A^\mu + \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T^3 - Q \sin^2 \theta_W) Z^\mu \right]^2 \Phi \\
&\supset e^2 \Phi^\dagger Q^2 \Phi A^\mu A_\mu \\
&= e^2 \Phi^\dagger Q \Phi A^\mu A_\mu \\
&= e^2 \phi^+ \phi A^\mu A_\mu
\end{aligned} \tag{3.280}$$

3.8 Muestre que el Lagrangiano en ec. (3.259) puede escribirse escalares en el espacio  $SU(2)$

3.9 Demuestre que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
&\supset -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \\
(F_W)_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+.
\end{aligned}$$



# Capítulo 4

## Ruptura espontánea de simetría

### 4.1. Masa para el campo escalar

Escribamos el Lagrangiano para una partícula escalar real de masa  $m$  como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad (4.1)$$

con

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2. \quad (4.2)$$

Este Lagrangiano es simétrico bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ .

Si  $\mu^2 > 0$  el campo tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial que cuestan energía y dicho término se interpreta como la masa de la partícula. Ver figura 4.1. En Teoría Cuántica de Campos al estado de mínima energía se le llama el vacío y las excitaciones alrededor del vacío corresponden a las partículas.

Si  $\mu^2 < 0$ , no existe un mínimo del potencial alrededor del cual el campo pueda oscilar. Además el alejamiento del campo del punto de simetría del potencial no cuesta energía. Por consiguiente en ese caso, el término de interacción

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \quad \mu^2 < 0, \quad (4.3)$$

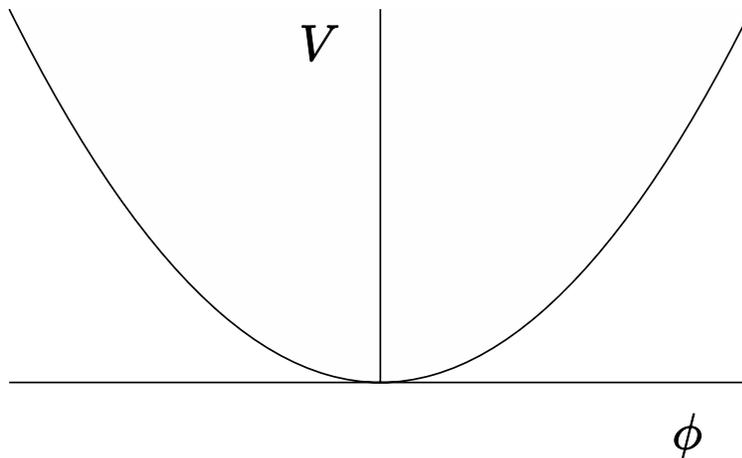


Figura 4.1:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$  con  $\mu^2 > 0$

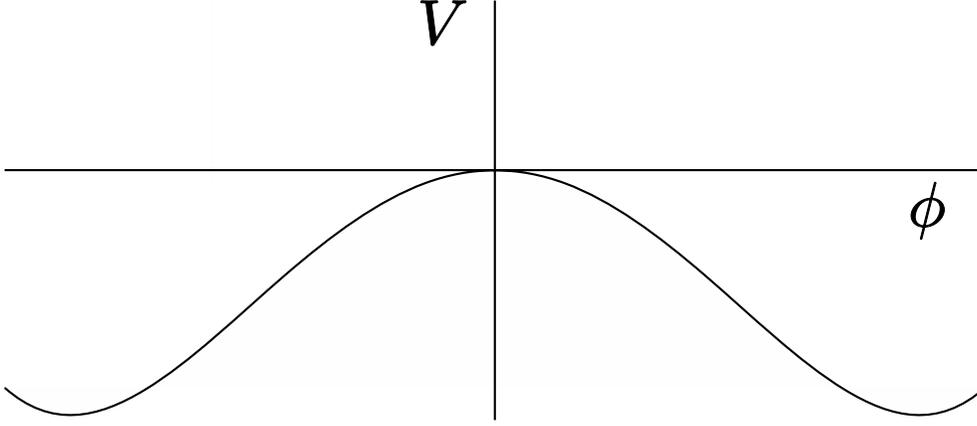


Figura 4.2:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ . Simetría exacta

Figura 4.3:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ . Simetría espontáneamente rota.

no puede interpretarse como un término de masa en el Lagrangiano dado por la ec. (4.1).

Consideremos ahora el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (4.4)$$

que mantiene la simetría bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ .  $\lambda > 0$  garantiza la aparición de los dos mínimos que se muestran en la figura 4.2. Si la energía es suficientemente alta como se muestra en la figura 4.2, las excitaciones son simétricas con respecto al máximo del potencial y el término en  $\mu^2$  no puede interpretarse como masa para la partícula escalar.

Sin embargo, si la energía es suficientemente baja como se muestra en la figura 4.3, las excitaciones alrededor del mínimo dan lugar a la aparición de un término de masa para el campo escalar. Además, dichas excitaciones no respetan la simetrías  $\phi \rightarrow -\phi$ . En tal caso decimos que la simetría ha sido espontáneamente rota: aunque el Lagrangiano mantiene la simetría original, el vacío la rompe.

Para analizar cuantitativamente el espectro de partículas es necesario expandir el campo alrededor del mínimo y determinar las excitaciones. Establezcamos en primer lugar los mínimos del potencial. La  $\partial V/\partial\phi = 0$  da lugar a

$$\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (4.5)$$

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0, \quad (4.6)$$

con extremos  $\phi_{\max} = 0$ , y

$$\phi_{\min} \equiv \langle\phi\rangle \equiv v = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.7)$$

De hecho

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi^2. \quad (4.8)$$

$\phi = 0$  corresponde a un máximo, mientras que la segunda derivada para  $\phi = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$  es  $-2\mu^2 > 0$  y corresponden a los mínimos. Expandiendo el campo alrededor del mínimo

$$\phi(x) = H(x) + v \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda(H^2 + 2vH + v^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda\left[H^4 + 2H^2(2vH + v^2) + (2vH + v^2)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda\left[H^4 + 4vH^3 + 2H^2v^2 + 4v^2H^2 + 4v^3H + v^4\right] \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda\left[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4\right] \\
&= \frac{1}{2}\mu^2H^2 - \frac{3}{2}H^2\mu^2 + \mu^2vH - \mu^2vH + \frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{1}{4}\mu^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda\left[H^4 + 4vH^3\right] \\
V(H) &= \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \frac{1}{4}\mu^2v^2, \tag{4.10}
\end{aligned}$$

y

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 - \lambda vH^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}. \tag{4.11}$$

Entonces  $H$  adquiere una masa  $-2\mu^2$  y no es invariante bajo  $H \rightarrow -H$ .

Otro método es usar las ecuaciones de mínimo  $-\mu^2 = \lambda v^2$ , para eliminar un parámetro del potencial:

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\
&= -\frac{1}{2}\lambda v^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda\left[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4\right] \\
&= \lambda v^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

## 4.2. Bosón de Goldstone

Consideremos ahora un campo escalar complejo sin término de masa, pero con potencial:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi - V(\phi) \tag{4.13}$$

$$V(\phi) = \mu^2\phi^*\phi + \lambda(\phi^*\phi)^2 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \tag{4.14}$$

La simetría del Lagrangiano corresponde a  $U(1)$  global. Este potencial corresponde al “sombrero mexicano”. Para una energía suficientemente baja de manera que el campo deba oscilar alrededor del mínimo aparecen dos tipos de excitaciones. Una sobre las paredes que cuestan energía y corresponden a un campo escalar cargado como en el caso anterior, y otra a lo largo de la circunferencia de mínimo, que corresponde a una partícula escalar sin masa.

Analíticamente tenemos dos formas de abordar el análisis

### 4.2.1. Coordenadas cartesianas

Expandimos el campo alrededor del mínimo:

$$\phi = \phi^0 = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v + iG) \tag{4.15}$$

Entonces

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \tag{4.16}$$

La condición de mínimo es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= 0 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2 (2\phi_1) + \frac{1}{4}\lambda 2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) 2\phi_1 \\
&= \phi_1 [\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= 0 \\
&= \phi_2 [\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Los infinitos mínimos degenerados corresponden a la circunferencia

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} \tag{4.19}$$

El campo debe ser neutro pues, reemplazando (4.15) en la ec. (4.16)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2}\mu^2 [(H+v)^2 + G^2] - \frac{1}{4}\lambda [(H+v)^4 + 2(H+v)^2 G^2 + G^4] \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}\mu^2 (H+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda (H+v)^4 + \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda [2(H+v)^2 G^2 + G^4].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Usando la ec. (4.10), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2) H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 \\
&+ \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda G^4 \\
&- \frac{1}{2}\lambda [H^2 G^2 + 2v H G^2 + v^2 G^2] + \text{constant}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2) H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 \\
&+ \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{4}\lambda G^4 \\
&- \lambda v H G^2 - \frac{1}{2}\lambda H^2 G^2 + \text{constant}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Como antes, el campo  $H$  tiene masa  $2|\mu^2|$ . El término en  $G^2$  ha desaparecido implicando que el campo  $G$  tiene masa cero. En este caso decimos que la invarianza  $U(1)$  de la acción ha sido espontáneamente rota

$$U = e^{iY\theta}, \tag{4.23}$$

donde  $Y$  es el generador de la transformación y  $\theta$  el parámetro. Después de la ruptura espontánea de la simetría diremos que el generador  $Y$  ha sido roto. El campo que adquiere masa recibe el nombre de *bosón de Higgs* [17], mientras que el campo sin masa es llamado *bosón de Goldstone*.

El *Teorema de Goldstone* establece que por cada generador roto de una simetría continua debe aparecer un bosón de Goldstone.

### 4.2.2. Coordenadas polares

Si hacemos

$$\phi = e^{i\eta(x)} \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \rho - i\rho \partial^\mu \eta) (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \eta) - \frac{1}{2} \mu^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \lambda \rho^4 \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta - \frac{1}{2} \mu^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \lambda \rho^4 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Haciendo  $\rho \rightarrow \rho + v$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} \mu^2 (\rho + v)^2 - \frac{1}{2} \lambda (\rho + v)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} v^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + 2v\rho \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{1}{4} \lambda \rho^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} v^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + 2v\rho \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta \end{aligned} \quad (4.26)$$

De nuevo no hay término de masa para  $\eta$ .

### 4.3. Masa para el bosón gauge

En el caso de la Acción invariante gauge local bajo el Grupo  $U(1)$ , tenemos el Lagrangiano (3.92):

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \mu^2 < 0 \text{ and } \lambda > 0 \quad (4.27)$$

Para obtener directamente el espectro después de la ruptura espontánea de simetría es conveniente usar la transformación gauge de la ec. (3.135). Haciendo  $\theta(x) = -\eta(x)$ :

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta(x)} e^{i\eta(x)} \left( \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) = \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= [(\mathcal{D}^\mu)' \phi']^* (\mathcal{D}_\mu)' \phi' - \mu^2 (\phi^*)' \phi' - \lambda [(\phi^*)' \phi']^2 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})' \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu H + igA'^\mu (H + v)] [\partial_\mu H - igA'_\mu (H + v)] - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.29)$$

En adelante omitiremos las primas, aunque debe estar claro que se esta trabajando en el gauge específico de la ec. (4.28). Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu (H + v)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Usando la ec. (4.10)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{A^\mu} + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H, \quad (4.31)$$

donde  $\mathcal{L}_H$  esta dado por la ec. (4.11) y

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu. \quad (4.32)$$

Teniendo en cuenta la ec. (2.126) para el Lagrangiano de Proca, vemos que como consecuencia de la ruptura espontánea de simetría el campo gauge ha adquirido una masa

$$m_{A^\mu} = gv. \quad (4.33)$$

El mecanismo completo mediante el cual, a partir de un Lagrangiano invariante gauge local, los bosones gauge adquieren masa se llama *mecanismo de Higgs* [17]. La partícula escalar que adquiere masa se llama Higgs, mientras que el bosón de Goldstone es absorbido por campo gauge como modo longitudinal.

El número de grados de libertad independientes en el Lagrangiano original en la ec. (4.27) es cuatro. Correspondientes a los dos grados de libertad del bosón gauge no masivo y los dos del campo escalar complejo. En el Lagrangiano final en la ec. (4.31) no aparece el bosón de Goldstone. Sin embargo esto no es un problema porque dicho Lagrangiano también tiene cuatro grados de libertad correspondientes a los tres grados de libertad del bosón gauge masivo y al grado de libertad del bosón de Higgs.

Sin usar la transformación gauge en ec. (4.27), tenemos que para

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v + iG(x)) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [\partial^\mu H - i\partial^\mu G + igA^\mu(H+v) + gA^\mu G] [\partial_\mu H + i\partial_\mu G - igA_\mu(H+v) + gA_\mu G] \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}\lambda G^4 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H+v)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial^\mu H + gA^\mu G + i[-\partial^\mu G + gA^\mu(H+v)] \} \{ \partial_\mu H + gA_\mu G - i[-\partial_\mu G + igA_\mu(H+v)] \} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}\lambda G^4 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH + v^2) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H + gA^\mu G)^2 + \frac{1}{2} [-\partial^\mu G + gA^\mu(H+v)]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}\lambda G^4 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda G^4 - g\partial^\mu G A_\mu H + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H + g\partial^\mu H A_\mu G \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu G^2 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH) \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial^\mu G\partial_\mu G + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^\mu A_\mu - gv\partial^\mu G A_\mu \\ &= \mathcal{L}_H - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{1}{4}\lambda G^4 - g\partial^\mu G A_\mu H + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H + g\partial^\mu H A_\mu G \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu G^2 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH) \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}\partial^\mu G\partial_\mu G + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^\mu A_\mu - gv\partial^\mu G A_\mu \end{aligned} \quad (4.36)$$

Podemos interpretar  $\mathcal{L}_2$  como los términos de mezcla entre  $A^\mu$  y, para compensar el índice de Lorentz,  $\partial^\mu G$ . Podemos escribirlo en forma matricial como

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial^\mu G & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -gv \\ -gv & g^2 v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu G \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

con  $\tan \beta = 1/(gv)$ . Si

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu G \\ A_\mu \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} \partial_\mu G' \\ A'_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} (\partial^\mu G' \quad A'^\mu) \left[ V \begin{pmatrix} 1 & -gv \\ -gv & g^2 v^2 \end{pmatrix} V^T \right] \begin{pmatrix} \partial_\mu G' \\ A'_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu G' \quad A'^\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + g^2 v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu G' \\ A'_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1 + g^2 v^2) A'^\mu A'_\mu. \end{aligned} \quad (4.40)$$

De nuevo, el bosón de Goldstone, en este caso  $\partial^\mu G'$ , es absorbido como modo longitudinal del  $A'_\mu$ .

## 4.4. Mecanismo de Higgs en un caso no Abeliano

Consideremos ahora una Acción invariante gauge local bajo  $S(2) \times U(1)_Y$ . Esta corresponde al sector bosónico del Modelo Estándar de las partículas elementales. Generalizando el Lagrangiano en la ec. (3.211)

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

con  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ . Además

$$\Phi \xrightarrow{SU(2) \times U(1)_Y} \Phi' = e^{i(\theta_j T^j + \alpha Y \cdot I)} \Phi, \quad (4.42)$$

y

$$\mathcal{D}_\mu = I \cdot \partial_\mu - ig W_\mu - ig' Y B_\mu = I \cdot \partial_\mu - ig T_i W_\mu^i - ig' Y B_\mu. \quad (4.43)$$

De la ec. (3.178)

$$W_\mu = T_i W_\mu^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- & -\frac{1}{2} W_3 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

De modo que

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \left( \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) & -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^- & \partial_\mu - i \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Sin pérdida de generalidad los cuatro grados de libertad de  $\Phi$ , pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{i\eta_j T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v) \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i\eta_3 & \sqrt{2} i\eta^+ \\ \sqrt{2} i\eta^- & 1 - i\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\eta^+ H + v i\eta^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H + v - i\eta_3 H - i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (h + v - iG^0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Para  $SU(2) \times U(1)_Y$  tenemos cuatro generadores y cuatro bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (4.46) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone, de manera que quedará un generador no roto correspondiente a una simetría remanente del vacío  $U(1)_Q$

$$SU(2) \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} U(1)_Q. \quad (4.47)$$

Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs, tres bosones gauge masivos, y un bosón gauge sin masa.

Para  $\alpha = 0$ , podemos hacer una transformación gauge usando la ec. (4.42) sobre el campo  $\Phi$ , tal que

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

que define el *gauge unitario*. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados  $\Phi'$  y  $W'_{\mu\nu}$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} \right]^\dagger \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

donde  $V(H)$  dado en la ec. (4.10), incluye el término de masa para el bosón de Higgs

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW^{\mu+}(H+v) \\ \partial^\mu H - i \left( -\frac{1}{2}gW_3^\mu + g'Y_\Phi B^\mu \right) (H+v) \end{pmatrix} \right]^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \right) (H+v) \end{pmatrix} \\ &\quad - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}}gW^{\mu-}(H+v) & \partial^\mu H + i \left( -\frac{1}{2}gW_3^\mu + g'Y_\Phi B^\mu \right) (H+v) \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+(H+v) \\ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \right) (H+v) \end{pmatrix} \\ &\quad - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H+v)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \partial^\mu H + i \left( -\frac{1}{2}gW_3^\mu + g'Y_\Phi B^\mu \right) (H+v) \right] \left[ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'Y_\Phi B_\mu \right) (H+v) \right] \\ &\quad - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H+v)^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2}gW_3^\mu + g'Y_\Phi B^\mu \right)^2 (H+v)^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \left( \frac{gv}{4} \right)^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H + \mathcal{L}_{WB} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{L}_{WB} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} g^2 W_3^\mu W_\mu^3 - \frac{1}{2} g g' Y_\Phi W_3^\mu B_\mu - \frac{1}{2} g g' Y_\Phi W_3^\mu B_\mu + g'^2 Y_\Phi^2 B^\mu B_\mu \right)^2 (H^2 + 2vH + v^2) \quad (4.53)$$

Haciendo  $Y_\Phi = 1/2$  como en la ec. (3.232),

$$\mathcal{L}_{WB} = \frac{1}{8} (W_3^\mu \quad B^\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \quad (4.54)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

con  $\tan \theta_W = g'/g$ , tal que  $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$ , como en la ec. (3.222). Si (ver ec. (3.216)),

$$\begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

entonces

$$\mathcal{L}_{WB} = \frac{1}{8} (Z^\mu \quad A^\mu) \left[ V^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} V \right] \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} V^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} V &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & -g^2 g' - g'^3 \\ +g^2 g' - g^2 g' & -gg'^2 + gg'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & -g^2 g' - g'^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^4 + g^2 g'^2 + g^2 g'^2 + g'^4 & g^3 g' + gg'^3 - g^3 g' - gg'^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WB} &= \frac{1}{2} \left( \frac{g^2 + g'^2}{4} \right) Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_W) Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{gv}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu + \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \end{aligned} \quad (4.59)$$

Retornando a la ec. (4.52), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \\ &\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu, \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}, \quad (4.61)$$

y

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (4.62)$$

Los términos en  $W_{\mu\nu}^i$ , y  $B_{\mu\nu}$  pueden escribirse en términos de  $W^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WB} &= -\frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} - \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4 \end{aligned} \quad (4.63)$$

donde

$$(F_W)_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \quad (4.64)$$

y  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_4$  están dados en [18]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 &= -ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^-Z_\nu + W_\mu^-W_\nu^+Z^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+A_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^-A_\nu + W_\mu^-W_\nu^+F^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -\frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+W^{\mu-})^2 - W_\mu^+W^{\mu+}W_\nu^-W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+W^{\mu-}Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+Z^\mu W_\nu^-Z^\nu) \\ &\quad - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+W^{\mu-}A_\nu Z^\nu - W_\mu^+A^\mu W_\nu^-Z^\nu - W_\mu^+Z^\mu W_\nu^-A^\nu) \\ &\quad - e^2 (W_\mu^+W^{\mu-}A_\nu A^\nu - W_\mu^+A^\mu W_\nu^-A^\nu). \end{aligned} \quad (4.66)$$

El Lagrangiano invariante gauge local bajo  $SU(2) \times U(1)_Y$  desarrollado, corresponde al Lagrangiano bosónico del modelo electrodébil del Modelo Estándar

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW}^{\text{boson}} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H \\ &\quad - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left( m_W^2 W^{\mu-}W_\mu^+ + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\ &\quad - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^-Z_\nu + W_\mu^-W_\nu^+Z^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+A_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^-A_\nu + W_\mu^-W_\nu^+F^{\mu\nu} \right] \\ &\quad - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+W^{\mu-})^2 - W_\mu^+W^{\mu+}W_\nu^-W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+W^{\mu-}Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+Z^\mu W_\nu^-Z^\nu) \\ &\quad - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+W^{\mu-}A_\nu Z^\nu - W_\mu^+A^\mu W_\nu^-Z^\nu - W_\mu^+Z^\mu W_\nu^-A^\nu) \\ &\quad - e^2 (W_\mu^+W^{\mu-}A_\nu A^\nu - W_\mu^+A^\mu W_\nu^-A^\nu). \end{aligned} \quad (4.67)$$

El Lagrangiano en ec. (4.41) tiene en total doce grados de libertad. Cuatro del doblete escalar complejo y ocho grados de libertad para los cuatro bosones gauge no masivos. El Lagrangiano final en la ec. (4.67) tiene doce grados de libertad, uno del bosón de Higgs, 9 para los bosones gauge masivos  $W_\mu^+$ ,  $W_\mu^-$ , y  $Z_\mu$  y dos del bosón gauge no masivo  $A_\mu$ . De nuevo, en el gauge unitario no aparecen los bosones de Goldstone explícitamente en el Lagrangiano. Estos han sido absorbidos como modos longitudinales de los tres bosones gauge masivos. Del teorema de Goldstone vemos que

como efecto de la ruptura espontánea de simetría hay tres generadores rotos que dan lugar a los tres bosones de Goldstone. Queda un generador no roto asociado a un bosón gauge no masivo  $A_\mu$ , que es una combinación lineal de los campos gauge neutros.  $A_\mu$  corresponde al fotón y está asociado a una simetría gauge local abeliana remanente del vacío. Entonces, la ruptura espontánea de simetría ocurre de  $S(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ .

Los resultados de esta sección se obtienen del Lagrangiano en ec. (3.196) haciendo  $\phi^+ = 0$ , y  $\phi^0 = \phi^{0*} = (H + v)/\sqrt{2}$ . En tal caso  $\mathcal{L}_3 = 0$  en ec. (3.202).



# Capítulo 5

## Fermiones

### 5.1. Ecuación de Dirac

#### 5.1.1. Fermiones de Weyl

Sea  $\psi$  un campo que satisface una ecuación covariante de segundo orden. La parte cinética del Lagrangiano sin términos de masa y sin términos de interacción debe tener la forma

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi - m\psi^\dagger b\psi \quad (5.1)$$

La Acción debe ser real, de modo que el Lagrangiano también. En efecto

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left( \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi^\dagger a^{\mu\dagger} \psi \right)^\dagger - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \left( -\frac{i}{2}\partial^\mu \psi^\dagger a_\mu^\dagger \psi + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \right) - m\psi^\dagger b^\dagger \psi \\ &= \mathcal{L} \quad \text{si } b^\dagger = b. \end{aligned}$$

Como al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a este Lagrangiano debemos obtener la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (5.2)$$

con  $\hat{H}$  una función por determinar del operador  $\hat{\mathbf{p}}$ , entonces

$$a_\mu^\dagger = a_\mu \quad (5.3)$$

El Lagrangiano en ec. (5.1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) + \frac{i}{2}\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \\ &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2}\partial_\mu (\psi^\dagger a^\mu \psi) - m\psi^\dagger b\psi \\ \mathcal{L} &= i\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi - m\psi^\dagger b\psi \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ahora utilizaremos el método desarrollado en capítulos anteriores para analizar el Lagrangiano. Calcularemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, la corriente conservada y el tensor de momento-energía.

### 5.1.2. Corriente conservada y Lagrangiano de Dirac

De la ec. (5.4)

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^\dagger \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \right] \\ &= i \psi^\dagger a^0 \delta \psi \end{aligned} \quad (5.5)$$

El Lagrangiano es invariante bajo transformaciones de fase globales,  $U(1)$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi \approx \psi - i\alpha \psi, \quad (5.6)$$

de modo que

$$\delta \psi = -i\alpha \psi. \quad (5.7)$$

Por consiguiente

$$J^0 = \alpha \psi^\dagger a^0 \psi \quad (5.8)$$

Para que  $J^0$  pueda interpretarse como una densidad de probabilidad, debemos redefinir el Lagrangiano en ec. (5.1) como

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m \bar{\psi} b \psi, \quad (5.9)$$

tal que

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger c, \quad (5.10)$$

con

$$c \gamma^0 = I \quad (5.11)$$

Para que este nuevo Lagrangiano sea real se requiere que,

$$\begin{aligned} c^2 &= I \\ c \gamma_\mu^\dagger c &= \gamma_\mu \\ c b^\dagger c &= b \end{aligned} \quad (5.12)$$

ya que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\dagger &= \left( \frac{i}{2} \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger b^\dagger c \psi \\ &= \left( \frac{i}{2} \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger c^2 \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \psi^\dagger c^2 b^\dagger c \psi \\ &= \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} c \gamma_\mu^\dagger c \psi \right) - m \bar{\psi} c b^\dagger c \psi \\ &= \left( \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - m \bar{\psi} b \psi \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos hacer  $b = I$ , y

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi, \quad (5.13)$$

La nueva corriente conservada contiene

$$\begin{aligned}
 J^0 &\propto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \right] \\
 &= \bar{\psi} \gamma^0 \psi \\
 &= \psi^\dagger c \gamma^0 \psi \\
 &= \psi^\dagger \psi
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad.  $\bar{\psi}$  se define como la *adjunta* de  $\psi$ .

En general

$$\begin{aligned}
 J^\mu &\propto \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \bar{\psi} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] \\
 &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &\propto i \bar{\psi} \gamma^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &= \bar{\psi} \gamma^\mu \psi
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger c \gamma^\mu \Psi \tag{5.16}$$

### 5.1.3. Tensor momento-energía

$$\begin{aligned}
 T_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} - \mathcal{L} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\
 &= -i \bar{\psi} \gamma^i \partial_i \psi + m \bar{\psi} \psi, \\
 &= \bar{\psi} (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
 &= \psi^\dagger c (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \psi, \\
 &= \psi^\dagger \hat{H} \psi,
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

donde

$$\hat{H} = c(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) \tag{5.18}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H} \psi d^3x. \tag{5.19}$$

Además

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi})} \\
 &= i \bar{\psi} \gamma^0 \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger (-i \partial_i) \psi
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{5.21}$$

### 5.1.4. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Queremos que el Lagrangiano de lugar a la ecuación de Schrödinger de validez general

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi \quad (5.22)$$

con el Hamiltoniano dado en la ec. (5.19), que corresponde a un Lagrangiano de sólo derivadas de primer orden y covariante, en lugar del Hamiltoniano para el caso no relativista.

De hecho, aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo  $\bar{\psi}$  al Lagrangiano en ec. (5.13), tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= 0 \\ i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_0 \psi + i\gamma^i \partial_i \psi - m\psi &= 0 \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi - \boldsymbol{\gamma} \cdot (-i\nabla) \psi - m\psi &= 0, \\ i\gamma^0 \partial_0 \psi &= (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m)\psi, \end{aligned}$$

de donde

$$i\gamma^{02} \frac{\partial}{\partial t} \psi = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m)\psi. \quad (5.24)$$

Comparando con ecs. (5.22) y (5.18), tenemos que

$$\begin{aligned} c &= \gamma^0 \\ \gamma^{02} &= 1. \end{aligned} \quad (5.25)$$

De la ec. (5.18)

$$\hat{H} = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m), \quad (5.26)$$

y de la ec. (5.12)

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (5.27)$$

A este punto, sólo nos queda por determinar los parámetros  $\gamma^\mu$ .

La ec. (5.22) puede escribirse como

$$\left( i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \psi = 0. \quad (5.28)$$

El campo  $\psi$  también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left( -i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que  $\partial\hat{H}/\partial t = 0$ ,

$$\begin{aligned} \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \psi &= 0 \\ \left(-i\frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i\frac{\partial\psi}{\partial t} - \hat{H}\psi\right) &= 0 \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + i\left(\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}\right)\psi + i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} - i\hat{H}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \hat{H}^2\psi &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right)\psi &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

De la ec. (5.26), y usando la condición en ec. (5.25), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m)(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + \gamma_0 m) \\ &= (\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p})(\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}) + m\gamma_0\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}\gamma_0 + m\gamma_0^2\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m^2 \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sea

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma^0 \\ \alpha^i &= \beta\gamma^i \\ \gamma^i &= \beta\alpha^i \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + m\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + m^2 \\ &= (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + m(\boldsymbol{\alpha}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{p} + m^2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Sea  $A$  una matriz y  $\theta$  en un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2}\theta^{i2} + \sum_{i<j} \{A^i, A^j\} \theta^i\theta^j \quad (5.33)$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i<j} \{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j + m(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) p_i + m^2 \quad (5.34)$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= 1 \\ \{\alpha_i, \alpha_j\} &= 0 \quad i \neq j \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2 + m^2 \quad (5.36)$$

y reemplazando en la ec. (5.29) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para  $\psi$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi &= 0 \\ (\square + m^2)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (5.37)$$

En términos de las matrices  $\gamma^\mu$  las condiciones en ec. (5.35) son

$$\begin{aligned} \gamma^{0^2} &= 1 \\ \alpha^{i^2} = 1 &\rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^i = -\gamma^{i^2} = 1 \rightarrow \gamma^{i^2} = -1 \\ \gamma^i \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^i &= \{\gamma^i, \gamma^0\} = 0 \end{aligned} \quad (5.38)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \{\alpha^i, \alpha^j\} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 \gamma^j + \gamma^0 \gamma^j \gamma^0 \gamma^i = 0 & i \neq j \\ -\gamma^0 \gamma^0 \gamma^i \gamma^j - \gamma^0 \gamma^0 \gamma^j \gamma^i &= 0 & i \neq j \\ \gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i &= 0 & i \neq j \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= 0 & i \neq j \end{aligned} \quad (5.39)$$

Las ecuaciones (5.38)(5.39) pueden escribirse como

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}. \quad (5.40)$$

donde

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i) \quad (5.41)$$

Además, de la ec. (5.27),

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (5.42)$$

Cualquier conjunto de matrices que satisfagan el álgebra en ec. (5.40) y la condición en ec. (5.42), se conocen como matrices de Dirac. A  $\psi$  se le llama espinor de Dirac.

En términos de las matrices  $\gamma^\mu$ , el Lagrangiano de Dirac y la ecuación de Dirac, son respectivamente de las ecs. (5.13) y (5.23)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \quad (5.43)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad (5.44)$$

donde

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (5.45)$$

### 5.1.5. Propiedades de las matrices de Dirac

De la ec. (5.42)

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma^{0\dagger} = \gamma^0 & \mu = 0 \\ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^{0^2} \gamma^i = -\gamma^i & \mu = i \end{cases}. \quad (5.46)$$

Definiendo

$$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (5.47)$$

entonces,

$$\gamma_5^2 = \mathbf{1}, \quad (5.48)$$

Teniendo en cuenta que  $\gamma_\mu^2 \propto \mathbf{1}$  y conmuta con las demás matrices, tenemos por ejemplo

$$\begin{aligned}
\gamma_5\gamma_3 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 = \gamma_3^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2 = -\gamma_3 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_3\gamma_5 \\
\gamma_5\gamma_2 &= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3 = -\gamma_2^2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_3 = -\gamma_2 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_2\gamma_5 \\
\gamma_5\gamma_1 &= i\gamma_0\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1^2 i\gamma_0\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1 i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_1\gamma_5 \\
\gamma_5\gamma_0 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0 = -\gamma_0^2 i\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma_0\gamma_5.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

De modo que

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \tag{5.50}$$

Expandiendo el anticonmutador tenemos

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu\gamma_5 &= -\gamma_5\gamma_\mu \\
\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5 &= -\gamma_\mu \\
\text{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_5) &= -\text{Tr}\gamma_\mu \\
\text{Tr}(\gamma_5\gamma_5\gamma_\mu) &= -\text{Tr}\gamma_\mu \\
\text{Tr}\gamma_\mu &= -\text{Tr}\gamma_\mu,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

y por consiguiente

$$\text{Tr}\gamma_\mu = 0. \tag{5.52}$$

Si

$$\tilde{\gamma}_\mu \equiv U\gamma_\mu U^\dagger, \tag{5.53}$$

para alguna matriz unitaria  $U$ , entonces  $\tilde{\gamma}_\mu$  corresponde a otra representación de álgebra de Dirac en ec. (5.40), ya que

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu\} &= \{U\gamma^\mu U^\dagger, U\gamma^\nu U^\dagger\} \\
&= U\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}U^\dagger \\
&= 2g^{\mu\nu}UU^\dagger \\
&= 2g^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Claramente, la condición en ec. (5.42) se mantiene para la nueva representación. Como  $\gamma_0$  es hermítica, siempre es posible escoger una representación tal que  $\tilde{\gamma}_0 \equiv U\gamma_0 U^\dagger$  sea diagonal. Como  $\gamma_0^2 = 1$ , sus entradas en la diagonal deben ser  $\pm 1$ , y como  $\text{Tr}\tilde{\gamma}_0 = 0$ , debe existir igual número de  $+1$  que de  $-1$ . Por lo tanto la dimensión de  $\gamma_0$  (y de  $\gamma_\mu$ ) debe ser par:  $2, 4, \dots$

Si  $U = \gamma^0$ , entonces  $\tilde{\gamma}^0 = \gamma^0$  y  $\tilde{\gamma}^i = -\gamma^i$ .

Para una matriz de  $n$  dimensiones existen  $n^2$  matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes. Si se sustrae la identidad quedan  $n^2 - 1$  matrices hermíticas (o anti-hermíticas) independientes de traza nula. En el caso  $n = 2$  corresponden a las 3 matrices de Pauli. En el caso de la ecuación de Dirac se requieren 4 matrices independientes, por lo tanto deben ser matrices  $4 \times 4$ . En efecto para  $n = 4$  existen 15 matrices independientes de traza nula dentro de las cuales podemos acomodar sin problemas las 4  $\gamma^\mu$ . En la Tabla 5.1 se muestran las matrices de traza nula con sus propiedades de transformación bajo el Grupo de Lorentz. En la última se muestra el correspondiente escalar en el espacio de Dirac  $\bar{\psi}\Gamma\psi$ .

Matriz $\Gamma$	Transformación	Número	Escalar en Dirac
$\mathbf{1}$	Escalar (S)	1	$\bar{\psi}\psi$
$\gamma_5$	Pseudoescalar (P)	1	$\bar{\psi}\gamma_5\psi$
$\gamma_\mu$	Vector (V)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$
$\gamma_\mu\gamma_5$	Vector axial (A)	4	$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$
$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$	Tensor antisimétrico (T)	6	$\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$
		16	

Tabla 5.1: Matrices  $\Gamma_i$ .

## 5.2. Electrodinámica Cuántica

Para hacer el Lagrangiano en ec. (5.43) invariante gauge local bajo  $U(1)_Q$ , procedemos de la forma usual. El campo transforma como

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{-iQ\theta(x)}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{iQ\theta(x)}.\end{aligned}\quad (5.55)$$

La derivada covariante se define de manera que transforma de la misma forma que el campo, introduciendo el campo gauge  $A^\mu$

$$\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - ieQA^\mu \quad (5.56)$$

El Lagrangiano correspondiente a la interacción de un fermión y el campo electromagnético es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.57)$$

y es invariante bajo transformaciones locales  $U(1)_Q$ . Desarrollando la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (5.58)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ , tenemos

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + eQ\gamma^\mu A_\mu\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - i^2 eQ\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \\ [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m]\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi &= 0.\end{aligned}\quad (5.59)$$

Que corresponde a la ecuación de Dirac en presencia del campo electromagnético. Mientras que para el campo  $A^\mu$ , tenemos

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[ \frac{F^{\rho\eta} F_{\rho\eta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - eQ\bar{\psi}\gamma^\rho\psi \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -eQ\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\end{aligned}\quad (5.60)$$

Definimos entonces la corriente electromagnética generada por el fermión como

$$j^\mu = -eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \quad (5.61)$$

De nuevo, la aparición de la interacción electromagnética es una consecuencia de la invarianza gauge local.

El cálculo de la corriente para una invarianza de fase global es

$$\begin{aligned} J^\mu &\propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta \psi + \delta \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \\ &\propto \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \end{aligned} \quad (5.62)$$

y para la ecuación de Dirac, a diferencia de la ecuación de Schrödinger, la corriente de probabilidad tiene la misma forma que la corriente electromagnética.

### 5.3. Cromodinámica Cuántica

Los protones, neutrones, piones, kaones y demás hadrones, son partículas compuestas de constituyentes elementales llamados quarks. Por ejemplo los protones, neutrones y piones están constituidos de quarks up y down. Los hadrones están divididos en bariones,  $B$ , constituidos de tres quarks, y los mesones,  $M$ , de dos. Para satisfacer el principio de exclusión de Pauli, y justificar el confinamiento de los hadrones, se requiere que cada quark contenga  $N_c$  cargas diferentes, llamadas cargas de color, de manera que la carga de color de un hadrón sea cero. Muchos resultados experimentales respaldan la existencia de tres cargas de color para cada quark,  $N_c = 3$ . De este modo cada quark  $q = u, d, c, s, t, b$  viene en tres colores

$$q_\alpha = q_1, q_2, q_3 = q_r, q_b, q_g, \quad (5.63)$$

donde los últimos subíndices hacen referencia a los colores red, blue, green. De este modo los Bariones y mesones están descritos por combinaciones singletes de color del tipo  $q_r q_b q_g$  y  $q_r \bar{q}_r$ ,

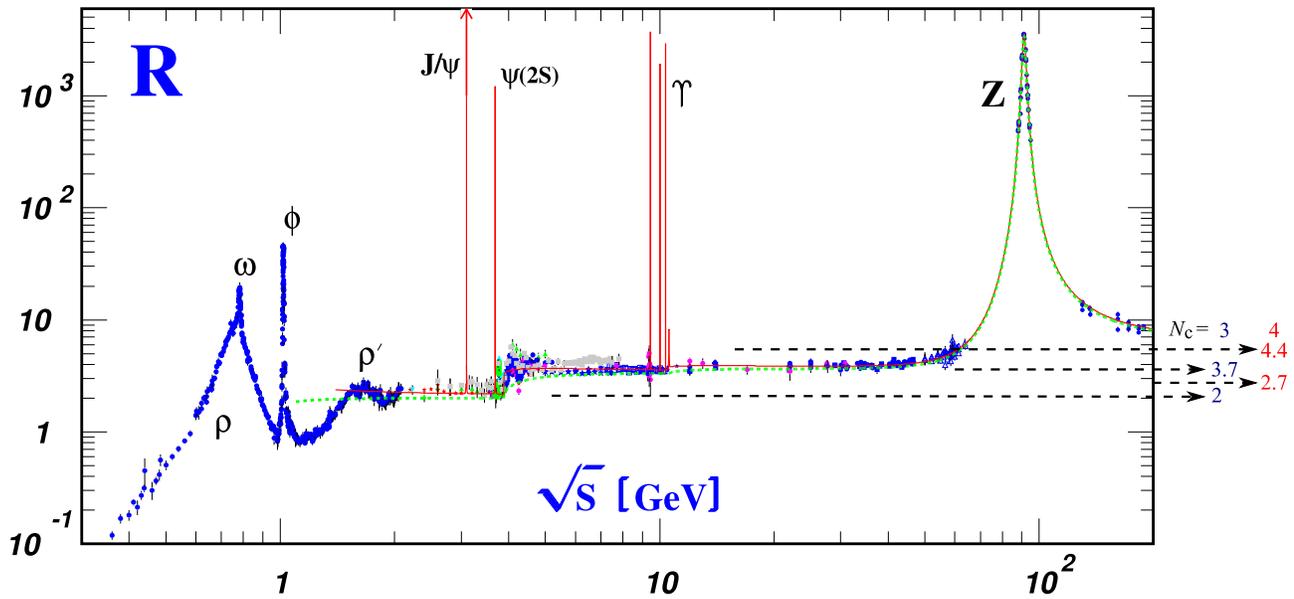
$$B = \frac{1}{\sqrt{6}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} |q_\alpha q_\beta q_\gamma\rangle \quad M = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{\alpha\beta} |\bar{q}_\alpha q_\beta\rangle \quad (5.64)$$

Estos estados son singletes de color, ver problema 5.2 Una de las determinaciones de  $N_c$  proviene del observable

$$R \approx \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.65)$$

Para  $f = u, d, s, c, b, t$ , (en orden de masa) tenemos que para una energía donde se pueden producir hadrones compuestos de hasta quarks  $f_{\max}$

$$\begin{aligned} R &\approx \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sum_{\alpha=1}^{N_c} \sigma(e^+e^- \rightarrow f_\alpha \bar{f}_\alpha)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \\ R &\approx N_c \frac{\sum_{f=u}^{f_{\max}} \sigma(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Figura 5.1: Datos para  $R$ 

De este modo  $R$  está dado por la suma de las cargas eléctricas al cuadrado

$$\begin{aligned}
 R &\approx N_c \frac{\sum_f Q_f^2}{Q_\mu^2} \\
 &= N_c \sum_{f=u}^{f_{\max}} Q_f^2 \\
 &= \begin{cases} N_c \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{2}{3} N_c & f = u, d, s, f_{\max} = s \\ N_c \left[ 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{10}{9} N_c & f_{\max} = c \\ N_c \left[ 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2 \right] = \frac{11}{9} N_c & f_{\max} = b \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 2 & N_c = 3, f_{\max} = s \\ \frac{10}{3} & N_c = 3, f_{\max} = c \\ \frac{11}{3} & N_c = 3, f_{\max} = b \end{cases} \quad (5.67)
 \end{aligned}$$

En la figura, tomada de [5], se muestra el gráfico de  $R$  con respecto a  $\sqrt{s}$  (la energía de centro de masa de la colisión). Se observan dos escalones, uno que va hasta una energía  $\sqrt{s} \approx 4$  GeV que corresponden a  $f = u, d, s$ , y otro hasta  $\sqrt{s} \approx 40$  GeV que corresponde a  $f = u, d, s, c, b$ . El valor de  $R$  es compatible con el esperado de la ec. (5.67). Como referencia también se señalan los valores para  $N_c = 4$  (en rojo).

Si queremos que el color sea una carga conservada como la carga eléctrica, o la de isospín débil, esta debe ser la consecuencia de una simetría gauge local. Para tener tres cargas diferentes la posibilidad más simple es imponer la simetría  $SU(3)_c$ , tal que tengamos un vector compuesto de 3 espinores de Dirac en el espacio de color:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

El Lagrangiano de Dirac con invarianza gauge global  $SU(3)$ , para un quark, se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{\text{global}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi, \quad (5.69)$$

donde

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp\left(i\theta_a\frac{\lambda^a}{2}\right)\Psi. \quad (5.70)$$

$a = 1, \dots, 8$ ,  $\lambda_a/2$  son los ocho generadores de  $SU(3)$  y  $\theta_a$  son los parámetros de la transformación global.

En un análisis similar al de la sección 3.5 tenemos que la Acción invariante gauge local bajo  $SU(3)_c$ , se obtiene de reemplazar la derivada normal por la derivada covariante (ver ec. (3.195))

$$\mathcal{L}_{\text{local}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{G}^{\mu\nu}\mathbf{G}_{\mu\nu}), \quad (5.71)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right]\Psi \\ \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right]\mathcal{D}_\mu\Psi, \end{aligned} \quad (5.72)$$

con

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s\frac{\lambda_a}{2}G_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig_sG_\mu \quad (5.73)$$

con la definición de esta matriz  $3 \times 3$  similar a la de la ec. (3.178)

$$(G_\mu)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{\alpha\beta} G_\mu^a \quad (5.74)$$

En términos, la transformación de los campos gauge esta dada por

$$G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = UG^\mu U - \frac{i}{g_s}(\partial^\mu U)U^\dagger. \quad (5.75)$$

Similarmente, definiendo la matriz  $3 \times 3$ , como se hizo en la ec. (3.188)

$$G^{\mu\nu} = \frac{i}{g_s}[\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \equiv \frac{\lambda_a}{2}G_a^{\mu\nu}, \quad (5.76)$$

donde

$$G_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \equiv \tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu, \quad (5.77)$$

con

$$\tilde{G}_a^{\mu\nu} = \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu \quad (5.78)$$

y  $f^{abc}$  son las constantes de estructura fina de  $SU(3)$

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = if^{abc}\frac{\lambda^c}{2}. \quad (5.79)$$

Definiendo el producto vectorial de  $SU(3)$  como

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_a = f_{abc} A^b B^c, \quad (5.80)$$

si  $\mathbf{G}^\mu$  es un vector en el espacio  $SU(3)$  con las 8 componentes  $G_a^\mu$ , podemos escribir la ec. (5.77) como en la sección 3.7

$$\mathbf{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{G}^\nu - \partial^\nu \mathbf{G}^\mu + g_s \mathbf{G}^\mu \times \mathbf{G}^\nu, \quad (5.81)$$

donde  $\mathbf{G}^{\mu\nu}$  es el vector en el espacio  $SU(3)$  con las 8 componentes  $G_a^{\mu\nu}$ . Expandiendo el Lagrangiano en ec. (5.71), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\ &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{global}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{SI}}, \quad (5.83)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{global}} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) + J_a^\nu G_\nu^a, \end{aligned} \quad (5.84)$$

es la nueva corriente conservada de interacción fuerte que surge como consecuencia de la invarianza gauge local  $SU(3)$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \\ &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\ &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e, \end{aligned} \quad (5.85)$$

son los términos de autointeracción gauge.

La coorriente de color

$$\begin{aligned} j^\mu &\propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \delta \Psi + \delta \bar{\Psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu G_\nu^a)} \delta G_\nu^a \\ &\propto i\bar{\Psi}\gamma^\mu i\theta^a(x) \frac{\lambda_a}{2} \Psi - G_a^{\mu\nu} \left( \frac{1}{g_s} \partial_\nu \theta^a + f_{abc} G_\nu^b \theta^c \right) \\ &\propto -\theta^a(x) \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi - \frac{1}{g_s} G_a^{\mu\nu} \partial_\nu \theta^a - G_a^{\mu\nu} f_{dba} G_\nu^b \theta^a \\ &\propto -\theta^a(x) \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi - (\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a \theta^a - \frac{1}{g_s} \partial_\nu (G_a^{\mu\nu} \theta^a) + \frac{1}{g_s} \theta^a \partial_\nu G_a^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Quitando el término con derivada total

$$\theta^a j_a^\mu \propto -\theta^a(x) \left[ \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi + (\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a - \frac{1}{g_s} \partial_\nu G_a^{\mu\nu} \right] \quad (5.87)$$

Eliminando de nuevo el término con derivada total, definimos

$$j_a^\mu = -g_s \left[ \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi + (\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a \right] \quad (5.88)$$

Todas las interacciones están determinadas en términos de una única constante de acoplamiento  $g_s$ . Las autointeracciones gauge pueden explicar aspectos de la interacción fuerte como la libertad asintótica, que consiste en que las interacciones fuertes se vuelven más débiles a distancias cortas.

En términos de índices de color la corriente, y las otras partes del Lagrangiano, pueden escribirse como

$$J_a^\mu = -g_s \bar{q}^\alpha \gamma^\mu q^\beta \left( \frac{\lambda_a}{2} \right)_{\alpha\beta}. \quad (5.89)$$

Note que tanto para la Electrodinámica Cuántica como para la Cromodinámica Cuántica la corriente  $\bar{\psi} \Gamma \psi$  es vectorial. Para las interacciones débiles la estructura es más complicada y requiere un conocimiento más profundo de la ecuación de Dirac y sus soluciones.

### 5.3.1. Ecuaciones de Euler–Lagrange

Siendo los mismos procedimientos anteriores debemos llegar a los siguientes resultados. Para el campo  $\Psi$

$$(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi = 0, \quad (5.90)$$

mientras que para los campos  $\mathbf{G}^{\mu\nu}$

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = \mathbf{J}^\nu, \quad (5.91)$$

donde el vector en espacio  $SU(3)$   $\mathbf{J}^\nu$  tiene las 8 componentes  $J_a^\nu$  dadas en la ec. (5.88). Como  $\mathbf{G}^{\mu\nu}$  es una matrix  $8 \times 8$ , la derivada covariante debe estar en la representación adjunta como en la ec. (3.249). La ecuación (3.267) aplicada a  $SU(3)$  es por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} + g_s \mathbf{G}_\mu \times \mathbf{G}^{\mu\nu} \\ \mathcal{D}_\mu G_a^{\mu\nu} &= \partial_\mu G_a^{\mu\nu} + g_s f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} = -g_s \left[ f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \quad (5.93)$$

donde

$$\begin{aligned} j_a^\nu &= -g_s \left[ f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \\ &= -g_s \left[ -(\mathbf{G}^{\mu\nu} \times \mathbf{G}_\nu^b)_a + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \end{aligned} \quad (5.94)$$

Como  $\mathbf{G}^{\mu\nu} = -\mathbf{G}^{\nu\mu}$  se sigue que

$$\partial_\nu j_a^\nu = 0 \quad (5.95)$$

y tenemos las ocho corrientes conservadas.

## 5.4. Soluciones a la ecuación de Dirac

### 5.4.1. Lagrangiano de Weyl

En la ec. (5.17), obtuvimos el Hamiltoniano en ec. (5.26)

$$\hat{H} = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} + m) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m. \quad (5.96)$$

Una escogencia particular de las cuatro matrices  $\gamma^\mu$ , conocida como la representación de Weyl, o representación quirial, puede escribirse en términos de la matrices de Pauli. Escritas en bloques  $2 \times 2$ , tenemos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.97)$$

Con  $\sigma^0 = 1$ . Con la matriz de transformación

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

podemos obtener la representación de Dirac, tal que  $U$  diagonaliza  $\gamma^0$ ,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

En adelante trabajaremos en la representación de Weyl que en forma compacta es

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma^\mu &= (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^\mu &= (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (5.101)$$

Hemos escrito las matrices de Dirac en bloques  $2 \times 2$ , y es natural escribir similarmente las cuatro componentes del campo de Dirac como un par de campos de dos componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

Donde  $\psi_{L,R}$  son espinores de Weyl de dos componentes. En la representación de Weyl el Lagrangiano se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \\ &= i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \\ &= i\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \partial_\mu\psi - m\psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \psi \\ &= i \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu\psi_L \\ \partial_\mu\psi_R \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L) \end{aligned} \quad (5.103)$$

### 5.4.2. Ecuaciones de Weyl

Las ecuaciones de Euler-Lagrangiano para el Lagrangiano en ec.(5.103), dan como resultado

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.104)$$

Expandiendo

$$\begin{aligned} i\sigma^0 \partial_0 \psi_L - i\sigma^i \partial_i \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^0 \partial_0 \psi_R + i\sigma^i \partial_i \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.105)$$

que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.106)$$

Para el Lagrangiano invariante gauge local  $U(1)$  en ec.(5.57), tendríamos

$$\begin{aligned} i\bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\sigma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.107)$$

Expandiendo, para  $\mathcal{D}^\mu$  dado en la ec.(5.56), con  $q = -e$

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (5.108)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} i(\partial_0 + iqA_0)\psi_L - i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i(\partial_0 + iqA_0)\psi_R + i\sigma^i(\partial_i + iqA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.109)$$

de donde

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)\psi_L - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_L - m\psi_R &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0)\psi_R + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.110)$$

## 5.5. Espín

El momento angular está descrito por el álgebra

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (5.111)$$

Si dos operadores no conmutan no es posible conocer sus autovalores simultáneamente. Sin embargo

$$[\hat{L}_i, \hat{L}^2] = 0 \quad (5.112)$$

y por convención podemos escoger  $\langle \hat{L}_z \rangle$  y  $\hat{L}^2$  como los dos observables de momento angular.

Las matrices de Pauli forman una representación del álgebra de momento angular

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (5.113)$$

donde el *operador de espín* se define como

$$\hat{S}_i = \frac{\sigma_i}{2} \quad (5.114)$$

Los autovalores del operador de espín son entonces

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

que corresponde a autovalores  $\lambda = \pm 1/2$  con autovectores

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

que son autoestados de espín up y espín down respectivamente. Una función de onda de espín ha de poder expandir en términos de estos autoestados

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle \quad (5.117)$$

donde  $|c_1|^2$  y  $|c_2|^2$  corresponden a las probabilidades de encontrar el estado con espín up o espín down respectivamente. Además

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1 \quad (5.118)$$

y  $\psi$  es un espinor. La ecuación de Schrödinger para un espinor es, por ejemplo

$$i\frac{\partial\psi_R}{\partial t} = \hat{H}\psi_R \quad (5.119)$$

donde

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (5.120)$$

con  $\psi_i$  las funciones de onda convencionales. Dicha ecuación debe ser invariante bajo rotaciones en el espacio de espín

$$\psi_R \rightarrow \psi'_R = \exp(i\frac{\sigma^i}{2}\theta_i)\psi_R. \quad (5.121)$$

Esta es justo las ecuaciones que aparecen cuando se hace  $m = 0$  en la ec.(5.106). Para  $\psi_R$

$$\hat{H} = i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \quad (5.122)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R + i\psi_R^\dagger \sigma^i \partial_i \psi_R \\ &= i\psi_R^\dagger \partial_0 \psi_R - i\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \psi_R \end{aligned} \quad (5.123)$$

Como el Lagrangiano debe ser escalar entonces  $\psi_R^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi_R$  debe ser un vector en el espacio de espín. En efecto, escogiendo los coeficientes como

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ c_2 &= e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{aligned} \quad (5.124)$$

entonces

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = c_1 c_1^* + c_2 c_2^* = \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) = 1. \quad (5.125)$$

Para

$$\begin{aligned} \psi_R &= e^{-ip \cdot x} (c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle) = e^{-ip \cdot x} \left[ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} |+\rangle \end{aligned} \quad (5.126)$$

donde

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (5.127)$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma_1 \psi_R &= (c_1^\dagger \quad c_2^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= (c_2^\dagger \quad c_1^\dagger) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= c_2^\dagger c_1 + c_1^\dagger c_2 \\ &= \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) e^{-i\phi} + \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) e^{i\phi} \\ &= (e^{-i\phi} + e^{i\phi}) \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \\ &= (2 \cos \phi) \frac{1}{2} \sin \theta \\ &= \cos \phi \sin \theta \end{aligned} \quad (5.128)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} \psi_R^\dagger \sigma_2 \psi_R &= \sin \phi \sin \theta \\ \psi_R^\dagger \sigma_3 \psi_R &= \cos \theta \end{aligned} \quad (5.129)$$

Por consiguiente  $\psi^\dagger \sigma_i \psi$  son las componentes de un vector unitario  $\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi$  con ángulo polar  $\theta$  y ángulo azimutal  $\phi$ . Posibles escalares se pueden construir con otros vectores disponibles, por ejemplo  $\mathbf{p}$ , como en la ec. (5.123).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \sigma^i \frac{p^i}{|\mathbf{p}|} \\ &= \sigma^1 \cos \phi \sin \theta + \sigma^2 \sin \phi \sin \theta + \sigma^3 \cos \theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) \\ \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) & -\cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.130)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}|+\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos(\theta/2) + \sin \theta \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi} [\sin \theta \cos(\theta/2) - \cos \theta \sin(\theta/2)] \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} \\
&= e^{-i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\phi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\
&= +|+\rangle
\end{aligned} \tag{5.131}$$

(El gorro en este caso, significa vector unitario). Decimos entonces que

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_R = +e^{-ip \cdot x}|+\rangle = +\psi_R \tag{5.132}$$

es un estado de helicidad positiva o derecha. Como  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}$  denota la proyección de espín sobre la dirección de movimiento, para la helicidad derecha, dicha proyección es positiva.

Si definimos además

$$\psi_L = e^{-ip \cdot x}|-\rangle \tag{5.133}$$

donde

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\theta/2) \\ e^{i\phi/2} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \tag{5.134}$$

entonces

$$\psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi = -(\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \tag{5.135}$$

y

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_L = -e^{-ip \cdot x}|-\rangle = -\psi_L \tag{5.136}$$

$\psi$  es un estado de helicidad negativa o izquierda. Además

$$\langle -|-\rangle = \langle +|+\rangle = 1 \quad \langle +|-\rangle = \langle -|+\rangle = 0 \tag{5.137}$$

donde  $\langle -| = |-\rangle^\dagger$ , etc.

## 5.6. Solución de partícula libre

Consideraremos inicialmente dos casos  $m^2 \gg \mathbf{p}^2$  y  $m^2 \ll \mathbf{p}^2$ .

De la ecuación relativista

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{5.138}$$

tenemos que para el caso no relativista  $m^2 \gg \mathbf{p}^2$ , podemos tomar  $\mathbf{p} = 0$ , de modo que

$$E^2 = m^2 \Rightarrow E = \pm m \tag{5.139}$$

La aparición de soluciones de Energía negativa. . .

A  $\mathbf{p} = 0$  proponemos las soluciones de energía positiva  $E = +m$

$$\psi_L = u_L e^{-iEt} = \psi_L = u_L e^{-imt} \quad \psi_R = u_R e^{-iEt} = u_R e^{-imt} \quad (5.140)$$

En este caso las ecs. (5.106) se reducen a

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - m\psi_R &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned} \quad (5.141)$$

de modo que para que (5.140) sea solución, se debe satisfacer que

$$u_L = u_R = u \quad (5.142)$$

con

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = |+\rangle. \quad (5.143)$$

El espinor completo es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} |+\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.144)$$

Con norma

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = |+\rangle^\dagger |+\rangle + |+\rangle^\dagger |+\rangle = 1 \quad (5.145)$$

Para el caso relativista  $m^2 \ll \mathbf{p}^2$ , podemos hacer  $m = 0$  y las ecuaciones (5.106) se desacoplan

$$\begin{aligned} i\partial_0 \psi_L - i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_L &= 0 \\ i\partial_0 \psi_R + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.146)$$

Proponemos como soluciones de energía positiva

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} = \psi_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et)} \quad (5.147)$$

reemplazando en las ecs. (5.146) tenemos

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= 0 \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (5.148)$$

De modo que para que las ecs. (5.147) sean solución se debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\mathbf{p}}{E} \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (5.149)$$

pero de la ec. (5.138), tenemos que para  $m = 0$ ,  $E = |\mathbf{p}|$ , y  $\mathbf{p}/E = \mathbf{p}/|\mathbf{p}| = \hat{\mathbf{p}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L &= -\psi_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (5.150)$$

Comparando con las ecuaciones (5.132) y (5.136) vemos que para las soluciones de energía positiva  $\psi_{R,L}$  corresponden en efecto a estado de helicidad derecha e izquierda respectivamente. Explicitamente

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\psi_L = e^{-ip \cdot x} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}|-\rangle = -e^{-ip \cdot x}|-\rangle = -\psi_L \quad (5.151)$$

El espinor de cuatro componentes para la solución de energía positiva es

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = e^{-ip \cdot x} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &= \bar{u}u = \psi^\dagger \gamma^0 \psi \\ &= (|-\rangle^\dagger \ |+\rangle^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= (\langle -| \ \langle +|) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= (\langle +| \ \langle -|) \begin{pmatrix} |-\rangle \\ |+\rangle \end{pmatrix} \\ &= \langle +|-\rangle + \langle -|+\rangle = 0 \end{aligned} \quad (5.153)$$

Es convención escoger la normalización del espinor de Dirac tal que

$$\bar{u}u = 2m \quad (5.154)$$

que de hecho es cero cuando  $m = 0$ .

Para las soluciones de energía negativa tenemos

$$\hat{\psi}_L = u_L e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad \hat{\psi}_R = u_R e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + Et)} \quad (5.155)$$

Para explorar las características de esta solución podemos reemplazar en la ec. (5.148)  $E \rightarrow -E$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$ , de modo que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\hat{\psi}_L &= +\hat{\psi}_L \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}\hat{\psi}_R &= -\hat{\psi}_R \end{aligned} \quad (5.156)$$

De modo que la antipartícula de una partícula de helicidad izquierda tiene helicidad derecha. Dentro de los errores experimentales actuales se puede afirmar que en la naturaleza solo se ha observado el neutrino izquierdo y su correspondiente antineutrino derecho.

Para  $m \neq 0$ , tenemos de la ecs. (5.106) y (5.147) (ver ec. (5.148))

$$\begin{aligned} E\psi_L + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_L &= m\psi_R \\ E\psi_R - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_R &= m\psi_L \end{aligned} \quad (5.157)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{E + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_L &= \psi_R \\ \left( \frac{E - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{m} \right) \psi_R &= \psi_L. \end{aligned} \quad (5.158)$$

En este caso sin embargo, la helicidad no está bien definida y sólo podemos afirmar que  $\psi_L$  corresponde a la solución que tiene mayor probabilidad de ser izquierda que derecha. Para calcular dicha probabilidad es necesario especificar los espinores  $u_{L,R}$  (ver [2], Capítulo 6). El resultado es que la probabilidad de que  $\psi_R$  sea derecho se obtiene de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)|\psi_R\rangle \rightarrow \begin{cases} +|\psi_R\rangle & v \rightarrow c \quad (\text{relativistic}) \\ +\frac{1}{2}|\psi_R\rangle & v \rightarrow 0 \quad (\text{non-relativistic}) \end{cases} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)|\psi_R\rangle\end{aligned}\quad (5.159)$$

mientras que la probabilidad de que sea izquierdo se obtiene de

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_R\rangle &= +\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right)|\psi_R\rangle \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_L\rangle &= -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)|\psi_R\rangle\end{aligned}\quad (5.160)$$

Si en un decaimiento  $\beta$  sólo se emiten electrones izquierdos, el grado de polarización del electrón emitido es, usando la ec. (5.160)

$$\langle\psi_R|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_R\rangle + \langle\psi_L|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}|\psi_L\rangle = +\frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right) = -\frac{v}{c}\quad (5.161)$$

El gráfico de polarización versus  $-v/c$ , [2] (§9.1), debe corresponder a una línea recta de pendiente  $45^\circ$ . Si sólo se emiten electrones derechos sería

$$+\frac{1}{2}\left(1 + \frac{v}{c}\right) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \frac{v}{c}\quad (5.162)$$

Mientras que si se emiten por igual electrones derechos e izquierdos la polarización total sería cero.

Las soluciones en ec. (6.6) pueden ser intercambiadas por  $\psi_L \rightarrow -\psi_R$ . Esto se puede ver como una transformación de paridad definida por

$$\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r} \qquad t \rightarrow t \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R.\quad (5.163)$$

De aquí el nombre de la transformación. Como  $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$  y  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , entonces

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L},\quad (5.164)$$

Entonces es de esperarse que el momentum angular intrínseco, transforme como el momentum angular, y

$$\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S} \Rightarrow \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}.\quad (5.165)$$

Bajo la transformación de paridad

$$\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p} \qquad \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R,\quad (5.166)$$

Las ecuaciones (6.6) quedan invariantes. Además bajo dicha transformación

$$\sigma^\mu \partial_\mu = \sigma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \rightarrow \sigma^0 \partial_0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla = \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu\quad (5.167)$$

de modo que el Lagrangiano correspondiente, dado en la ec. (5.103) también es invariante bajo la transformación de paridad

$$\sigma^\mu \partial_\mu \rightarrow \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \qquad \psi_L \leftrightarrow \psi_R\quad (5.168)$$

## 5.7. Límite no relativista en presencia de un campo electromagnético

En el límite no relativista, la ecuación de Dirac en presencia de un campo electromagnético (electrodinámica cuántica en la sección 5.2) debe contener la ecuación de Schrödinger en presencia de un campo electromagnético. Combinando las ecuaciones (5.110) tenemos

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)(\psi_L + \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L - \psi_R) - m(\psi_L + \psi_R) &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0)(\psi_L - \psi_R) - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)(\psi_L + \psi_R) + m(\psi_L - \psi_R) &= 0 \end{aligned} \quad (5.169)$$

Esta forma es útil porque de la solución de partículas libre esperamos que  $\psi_L - \psi_R$  sea pequeña. Como antes proponemos como solución

$$\psi_L = u_L e^{-ip \cdot x} \quad \psi_R = u_R e^{-ip \cdot x} \quad (5.170)$$

Para solucionar este sistema de ecuaciones acopladas definimos

$$\begin{aligned} \phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) \Rightarrow (\psi_L + \psi_R) = e^{-imt}\phi \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) \Rightarrow (\psi_L - \psi_R) = e^{-imt}\chi \end{aligned} \quad (5.171)$$

donde

$$\begin{aligned} \phi &= e^{imt}(\psi_L + \psi_R) = e^{imt} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} (u_L + u_R) = e^{i(m-E)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (u_L + u_R) \\ \chi &= e^{imt}(\psi_L - \psi_R) = e^{imt} e^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} (u_L - u_R) = e^{i(m-E)t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} (u_L - u_R) \end{aligned} \quad (5.172)$$

Reemplazando (5.171) en eq. (5.169)

$$\begin{aligned} e^{-imt}[m\phi + (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi - m\phi] &= 0 \\ e^{-imt}[m\chi + (i\partial_0 - qA_0)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi + m\chi] &= 0 \end{aligned} \quad (5.173)$$

de donde

$$\begin{aligned} (i\partial_0 - qA_0)\phi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\chi &= 0 \\ (i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi - \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi &= 0 \end{aligned} \quad (5.174)$$

Para una solución  $\chi \propto e^{i(-Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ , dentro de un sistema atómico, tenemos

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi = (E - qV + 2m)\chi \quad (5.175)$$

Para los potenciales de coulomb atómicos  $qV = qA_0 \sim 10eV$ , y como  $m \approx 0.5 \text{ MeV}$  para el electrón, entonces

$$(i\partial_0 - qA_0 + 2m)\chi \rightarrow (i\partial_0 + 2m)\chi \quad (5.176)$$

de la ec. (5.172) tenemos

$$(i\partial_0 + 2m)\chi = [(E - m) + 2m]\chi \quad (5.177)$$

En el límite no relativista de  $|\mathbf{p}| \approx 0$  ( estamos en la solución de energía positiva), de la ec. (5.138)  $E \approx +m$  y  $E - m \approx 0$ , entonces

$$(i\partial_0 + 2m)\chi \approx 2m\chi \quad (5.178)$$

Reemplazando en ec. (5.174)

$$\chi = \frac{1}{2m}\sigma^i(i\partial_i - qA_i)\phi \quad (5.179)$$

entonces

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \hat{H}\phi \quad (5.180)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{H}\phi &= qA_0\phi + \sigma^i(i\partial_i - qA_i)\frac{1}{2m}\sigma^j(i\partial_j - qA_j)\phi \\ &= \frac{1}{2m}\sigma^i(i\partial_i - qA_i)\sigma^j(i\partial_j - qA_j)\phi + qA_0\phi \\ &= \frac{1}{2m}\sigma^i\sigma^j(-\partial_i\partial_j - iq(\partial_i A_j) - iqA_j\partial_i - iqA_i\partial_j + q^2 A_i A_j)\phi + qA_0\phi \\ &= \frac{1}{2m} [(-\sigma^i\sigma^j\partial_i\partial_j + q^2\sigma^i\sigma^j A_i A_j)\phi - iq\sigma^i\sigma^j(\partial_i A_j)\phi - iq\sigma^i\sigma^j A_j\partial_i\phi - iq\sigma^i\sigma^j A_i\partial_j\phi] + qA_0\phi \end{aligned}$$

Usando las propiedades de las matrices de Pauli en ecs.(3.173) y la ec.(5.33), que para  $A^i = \sigma^i$  es

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i \theta_i^2 \quad (5.181)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \hat{H}\phi &= \frac{1}{2m} \{[-(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})^2 + q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2]\phi - iq\{\sigma^i, \sigma^j\}A_j\partial_i\phi - iq\sigma^i\sigma^j(\partial_i A_j)\phi\} + qA_0\phi \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2 A_i^2]\phi - 2iq\delta_{ij}A_j\partial_i\phi - iq(i\epsilon_{ijk}\sigma^k + \delta_{ij})(\partial_i A_j)\phi \right\} + qA_0\phi \\ &= \frac{1}{2m} \left\{ \sum_i [-\partial_i^2 + q^2 A_i^2]\phi - 2iqA_i\partial_i\phi - iq(\partial_i A_i)\phi - q\sigma^k(\epsilon_{ijk}\partial_i A^j)\phi \right\} + qA_0\phi \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2\phi &= (i\partial_i - qA_i)(i\partial_i - qA_i)\phi \\ &= (-\partial_i\partial_i + q^2 A_i A_i)\phi - iq(\partial_i A_i)\phi - iqA_i\partial_i\phi - iqA_i\partial_i\phi \\ &= \sum_i (-\partial_i^2 + q^2 A_i^2)\phi - 2iqA_i\partial_i\phi - iq(\partial_i A_i)\phi \end{aligned} \quad (5.182)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \hat{H}\phi &= \frac{1}{2m} \{(i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2\phi - q\sigma^k(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})_k\phi\} + qA_0\phi \\ &= \left[ \frac{1}{2m}(i\boldsymbol{\nabla} + q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left(\frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \cdot \mathbf{B} \right] \phi \end{aligned} \quad (5.183)$$

En ausencia del campo electromagnético recuperamos la Ecuación de Schrödinger para una partícula libre como era de esperarse. Sin el último término  $(q\boldsymbol{\sigma}/2m) \cdot \mathbf{B}$ , sería el Hamiltoniano de Schrödinger para una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. El término adicional es interpretado como la energía en un campo magnético, de un momento magnético intrínseco asociado con una partícula de Dirac. Definimos entonces el momento magnético intrínseco como ( $q = -e$ )

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_e &= -\frac{e\boldsymbol{\sigma}}{2m} \\ &= -2 \left( \frac{e}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &= -2 \left( \frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \\ &= -g_e \left( \frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\end{aligned}\tag{5.184}$$

donde hemos recuperado el factor  $\hbar$  y definido el *factor-g* [26],  $g_e = 2$ . Se define el momento magnético anómalo del electrón como

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2}\tag{5.185}$$

de modo que  $a_e = 0$ . Sin embargo experimentalmente  $a_e \sim 10^{-3}$

$$a_e = 0.001\ 159\ 652\ 1859(38)\tag{5.186}$$

Después de la segunda cuantización, se pueden realizar correcciones perturbativas al valor calculado anteriormente de  $g_e$ . Dicho cálculo ha sido realizado a cuarto orden en teoría de perturbaciones coincidiendo con el valor experimental hasta la décima cifra significativa. Este tipo de comprobaciones entre teoría y experimento ha llevado a considerar la Electrodinámica Cuántica (QED) como la mejor teoría que se halla construido para describir la naturaleza.

## 5.8. Fermiones quirales de cuatro componentes

Los fermiones izquierdos y derechos pueden ser escritos en términos de espinores de Dirac como

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L + \tilde{\psi}_R\tag{5.187}$$

En la representación de Weyl

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\tag{5.188}$$

Podemos definir

$$\begin{aligned}P_L &\equiv \frac{1 - \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P_R &\equiv \frac{1 + \gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.189}$$

De modo que

$$\begin{aligned} P_L\psi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{\psi}_L \\ P_R\psi &= \tilde{\psi}_R. \end{aligned} \quad (5.190)$$

En adelante omitiremos las tildes sobre los espinores de Dirac  $\tilde{\psi}_{L,R}$ .

Las matrices  $P_{L,R}$  tienen las propiedades

$$\begin{aligned} P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R}P_{L,R} = P_{L,R} \\ P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}. \end{aligned} \quad (5.191)$$

Usando la ec. (5.50)

$$P_{L,R}\gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2}\gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \quad (5.192)$$

Para escribir el Lagrangiano en término de los nuevos  $\psi_{L,R}$  debemos tener en cuenta que

$$\overline{\psi_{L,R}} = (P_{L,R}\psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} = \overline{\psi} P_{R,L} \quad (5.193)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi \\ &= i\overline{\psi}(P_L + P_R)\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}(P_L + P_R)\psi \\ &= i\overline{\psi}P_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}P_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}P_L\psi - m\overline{\psi}P_R\psi \\ &= i\overline{\psi}P_LP_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\overline{\psi}P_RP_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\overline{\psi}P_LP_L\psi - m\overline{\psi}P_RP_R\psi \\ &= i\overline{\psi}P_L\gamma^\mu\partial_\mu P_R\psi + i\overline{\psi}P_R\gamma^\mu\partial_\mu P_L\psi - m\overline{\psi}P_LP_L\psi - m\overline{\psi}P_RP_R\psi \\ &= i\overline{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R + i\overline{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L - m(\overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R). \end{aligned} \quad (5.194)$$

En términos de espinores de izquierdos y derechos de cuatro componentes la transformación de paridad

$$t \rightarrow t \quad \mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x} \quad \psi_L \rightarrow \psi_R, \quad \psi_R \rightarrow \psi_L. \quad (5.195)$$

da lugar a

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = i\overline{\psi}_R\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi_R + i\overline{\psi}_L\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m(\overline{\psi}_R\psi_L + \overline{\psi}_L\psi_R), \quad (5.196)$$

donde  $\tilde{\gamma}^\mu = U\gamma^\mu U^\dagger$ , con  $U = \gamma^0$ . Como las dos representaciones dan lugar a la misma física, podemos decir que el Lagrangiano en términos de espinores  $L, R$  de cuatro componentes es invariante bajo la transformación de paridad.

La existencia de ambos espinores  $\psi_{L,R}$  garantizan que el Lagrangiano de Dirac es invariante bajo la transformación de paridad.

La corriente de la electrodinámica cuántica en ec. (5.61) (o la de la cromodinámica cuántica, ec. (5.89)) conservan paridad ya que, siguiendo los mismos pasos que en la ec. (6.15)

$$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \overline{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R. \quad (5.197)$$

Si para alguna partícula, como es el caso del neutrino, no existe la componente derecha, entonces la correspondiente interacción vectorial viola paridad y no puede tener interacciones electromagnéticas ni fuertes, es decir, no se acopla con el fotón o los gluones. Además dicha partícula no puede tener masa de Dirac. En el caso del neutrino esto se entiende pues al no tener carga eléctrica sólo requiere dos grados de libertad independientes.

De otro lado, si una determinada interacción, como es el caso de la interacción débil, solo participa la componente izquierda de la ec. (5.197), está correspondiente a una interacción del tipo

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi \\ &= \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \psi,\end{aligned}\tag{5.198}$$

que de acuerdo a la asignación en la Tabla corresponde a una corriente V–A.

## 5.9. Problemas

- 1 Calcule la dimensión del campo  $\psi$
- 2 Demuestre que para una transformación  $SU(3)_c$  global, los estados  $B$  y  $M$  en la ec.(5.64) son invariantes. Es decir, son singletes de color (ver [2] §16.2)
- 3 Lagrangiano de Weyl.

a) Demuestre que  $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L = -\psi_L \sigma^\mu \psi_L^\dagger$

b) Definiendo  $\xi = \psi_L$  y  $\chi^\dagger = \psi_R$ , demuestre que hasta derivadas totales

$$\mathcal{L} = i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi - m(\xi\chi + \xi^\dagger\chi^\dagger)\tag{5.199}$$

De modo que el Lagrangiano para un fermión de Weyl,  $\psi_W$ , no masivo puede escribirse como

$$\mathcal{L} = i\psi_W^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_W\tag{5.200}$$

# Capítulo 6

## Modelo Estándar

### 6.1. Interacción Electrodébil para leptones

El Lagrangiano de Dirac para la primera generación de leptones representados por los campos  $\psi_e$  y  $\psi_\nu$ , es

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{\nu}_R \gamma^\mu \partial_\mu \nu_R - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - m_\nu(\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L) \quad (6.1)$$

donde

$$\psi_e \equiv e = e_L + e_R, \quad \psi_\nu \equiv \nu_e = \nu_L + \nu_R. \quad (6.2)$$

Este Lagrangiano debe dar cuenta de las características de las interacciones débiles.

#### Corrientes V–A

En dichas interacciones sólo participan las partes izquierdas de los campos. Esto nos permite prescindir del  $\nu_R$ , pues no tiene cargas débiles, fuertes o eléctricas

$$\mathcal{L} = i\bar{e}_L \gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \quad (6.3)$$

#### Simetría global $SU(2)_L \times U(1)_Y$

En el contexto de las interacciones débiles un  $e_L$  es completamente equivalente a un campo  $\nu_L$ . Es decir, el Lagrangiano debe ser invariante bajo una transformación  $SU(2)_L$  de esos campos. La diferencia entre ellos son sus respectivas cargas eléctricas y sus masas. Asumiendo que ambos campos tienen la misma hipercarga, podríamos esperar que la corriente electromagnética apropiada puede obtenerse a partir del Grupo semisimple  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Además las respectivas masas se podrían obtener a partir del mecanismo de Higgs. De hecho, definiendo el doblete

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (6.4)$$

este transforma bajo  $SU(2)_L$  como

$$\begin{aligned}
L &\rightarrow L' = \exp(iT^i\theta_i)L \approx (1 + iT^i\theta_i)L \\
\begin{pmatrix} \nu'_L \\ e'_L \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2} \left( \frac{\theta_1 - i\theta_2}{\sqrt{2}} \right) \\ \frac{i}{2}\sqrt{2} \left( \frac{\theta_1 + i\theta_2}{\sqrt{2}} \right) & 1 - i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \frac{i}{2} & \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^+ \\ \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^- & 1 - i\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 + \frac{i}{2})\nu_L + \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^+e_L \\ (1 - \frac{i}{2})e_L + \frac{i}{2}\sqrt{2}\theta^-\nu_L \end{pmatrix}. \tag{6.5}
\end{aligned}$$

Claramente el término de masa  $m_e$  en la ec. (6.3) no es invariante bajo esta transformación. El Lagrangiano en la ec. (6.3), sin término de masa, puede reescribirse de manera que exhiba de forma más explícita la invariante bajo  $SU(2)_L$  como

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu\partial_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R, \tag{6.6}$$

donde, bajo  $SU(2)_L$   $e_R$  transforma como

$$e_R \rightarrow e'_R = e_R. \tag{6.7}$$

Para que el Lagrangiano en la ec. (6.6) sea invariante gauge global bajo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , se debe satisfacer la relación de Gell-man-Nishijima (3.224)

$$\begin{aligned}
QL &= \begin{pmatrix} 0\nu_L \\ -1e_L \end{pmatrix} = (T_3 + Y)L = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + Y_L)\nu_L \\ (-\frac{1}{2} + Y_L)e_L \end{pmatrix} \\
Qe_R &= -1e_R = Y e_R = Y_R e_R, \tag{6.8}
\end{aligned}$$

de modo que

$$Y_L = -\frac{1}{2} \qquad Y_R = -1. \tag{6.9}$$

Concluimos que para que la simetría gauge local bajo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  sea exacta se requiere que la hipercarga  $Y$  de ambas componentes del doblete sea la misma y que ambas tengan masa cero. Para tener un modelo consistente debe existir un mecanismo para generar la masa del electrón.

### Simetría local $SU(2)_L \times U(1)_Y$

Para que las cargas de isospín débil se conserven localmente debemos cambiar la derivada normal en el Lagrangiano (6.6) por la derivada covariante de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$

$$\begin{aligned}
\partial^\mu &\rightarrow \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - igT^iW_i^\mu - ig'YB^\mu \\
&= \begin{pmatrix} \partial^\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'YB_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial^\mu + igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'YB_\mu \end{pmatrix}. \tag{6.10}
\end{aligned}$$

y el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu e_R - \frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \tag{6.11}$$

es el Lagrangiano invariante gauge local más general posibles para los campos  $e_{L,R}$ ,  $\nu_L$ ,  $W_i^\mu$ , y  $B^\mu$ . De acuerdo a la ec. (3.191)

$$W_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu + g \epsilon^{ijk} W_j^\mu W_k^\nu. \quad (6.12)$$

Para escribir el Lagrangiano en una forma compacta, debemos introducir una convención: siempre que los términos de  $\mathcal{D}^\mu$  actúen en un estado fermiónico de forma matricial diferente, el resultado es cero por definición. Así el resultado de hacer actuar  $T^i W_i^\mu$  sobre el singlete bajo  $SU(2)_L$ ,  $e_R$ , es cero. Note que

$$\mathcal{D}_\mu e_R = (\partial_\mu - ig' Y_R B_\mu) e_R. \quad (6.13)$$

En la sección 3.6 vimos que para tratar consistentemente el electromagnetismo conjuntamente con el grupo gauge local  $SU(2)$ , era necesario suponer inicialmente la existencia de un bosón gauge  $B^\mu$  asociado a un grupo  $U(1)_Y$  en lugar del  $A^\mu$  electromagnético asociado a  $U(1)_Q$ . El  $A^\mu$  se puede obtener posteriormente a partir de una combinación lineal apropiada de  $B^\mu$  y  $W_3^\mu$ , el bosón gauge diagonal de  $SU(2)$ .

## Mecanismo de Higgs

Como los bosones gauge  $W_i^\mu$  deben ser masivos para dar cuenta de que la interacción débil es de corto alcance, el Lagrangiano en ec. (6.11) debe ser complementado con un potencial escalar apropiado que pueda dar lugar a una ruptura espontánea de la simetría. De acuerdo a la discusión del Capítulo 4 la escogencia mínima es introducir un doblete escalar complejo

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Entonces

$$\mathcal{L} = i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (6.15)$$

donde  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ .

Los términos bosónicos en la ec. (6.15), ya fueran analizados en la sección 4.4, eq.(4.41).

## Lagrangiano de Yukawa

Para los campos del Lagrangiano en eq. (6.15), debemos asegurarnos de que todos los términos invariantes gauge locales y renormalizables sean considerados. De hecho un término de interacción entre fermiones y el campo escalar, correspondiente a una interacción de Yukawa, resulta ser invariante gauge local. Incluyendo dicho término en el Lagrangiano invariante  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  para los campos  $e$ ,  $\nu_L$ ,  $W_\mu^i$ ,  $B_\mu$  y  $\Phi$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ & - h_e \bar{L} \Phi e_R - h_e \bar{e}_R \Phi^\dagger L \\ & - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Bajo una transformación gauge local los campos transforman como:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu L &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu L)' = \exp(-iT^i\theta_i - iY_L) \mathcal{D}_\mu L \\ \mathcal{D}_\mu e_R &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu e_R)' = \exp(-iY_R) \mathcal{D}_\mu e_R \\ \Phi &\rightarrow \Phi' = \exp(-iT^i\theta_i - iY_\Phi) \Phi,\end{aligned}\tag{6.17}$$

Y la acción determinada por el Lagrangiano en ec. (6.16) permanece invariante bajo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Parte de los términos del Lagrangiano ya han sido analizados en el Capítulo 4.

## Gauge Unitario

Para obtener el espectro después de la ruptura espontánea de simetría es conveniente usar el Gauge Unitario para reescribir el campo de Higgs como en la ec. (4.48)

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}.\tag{6.18}$$

Usando los resultados de la sección 4.4 tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{HWB} &= (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \\ &\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu,\end{aligned}\tag{6.19}$$

donde:

■

$$\begin{aligned}V(H) &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4 \\ &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \frac{m_H^2}{2v} H^3 + \frac{1}{4} \frac{m_H^2}{2v^2} H^4 \\ &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right).\end{aligned}\tag{6.20}$$

con

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2.\tag{6.21}$$

■

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix},\tag{6.22}$$

tal que

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e.\tag{6.23}$$

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (6.24)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HWB} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\ &\quad + m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{g^2 v^2}{4v^2} (2vH + H^2) W^{\mu-} W_\mu^+ \\ &\quad + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu + \frac{1}{2v^2} \left( \frac{gv}{2 \cos \theta_W} \right)^2 (2vH + H^2) Z^\mu Z_\mu \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) + m_W^2 \left( 1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 \left( 1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) Z^\mu Z_\mu. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Además

$$\mathcal{L}_{lWB} = i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \quad (6.26)$$

Donde, usando el mismo procedimiento se obtiene el resultado análogo para la ec. (3.226)

$$\mathcal{L}_{lWB} = i\bar{L}\gamma^\mu [\partial_\mu - ig(T^1 W_\mu^1 + T^2 W_\mu^2) - i(gT^3 W_\mu^3 + g'Y B_\mu)] L + i\bar{e}_R \gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y B_\mu) e_R \quad (6.27)$$

Ya que

$$T^1 W_\mu^1 + T^2 W_\mu^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lWB} &= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e}_L \gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R \gamma^\mu \partial_\mu e_R + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\ &\quad + \bar{L} \gamma^\mu \left( \frac{g}{2} \tau_3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) L + g' \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R B_\mu e_R \end{aligned} \quad (6.29)$$

usando ec. (6.22)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lWB} &= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\ &\quad \bar{L} \gamma^\mu \left[ \frac{g}{2} \tau_3 (c_W Z_\mu + s_W A_\mu) + g' Y (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) \right] L + \\ &\quad g' \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R (-s_W Z_\mu + c_W A_\mu) e_R \\ &= i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + i\bar{e} \gamma^\mu \partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\ &\quad \bar{L} \gamma^\mu \left[ \left( \frac{g c_W}{2} \tau_3 - g' s_W Y \right) Z_\mu + \left( \frac{g s_W}{2} \tau_3 + g' c_W Y \right) A_\mu \right] L \\ &\quad - g' s_W \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R Z_\mu e_R + g' c_W \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R A_\mu e_R \end{aligned} \quad (6.30)$$

usando ec. (6.23)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{lWB} &= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\
&\quad \bar{L}\gamma^\mu\left(\frac{g c_W}{2}\tau_3 - g\frac{s_W^2}{c_W}Y\right)LZ_\mu + e\bar{L}\gamma^\mu\left(\frac{\tau_3}{2} + Y\right)LA_\mu \\
&\quad - g\frac{s_W^2}{c_W}\bar{e}_R Y_R e_R Z_\mu + e\bar{e}_R Y_R e_R A_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\
&\quad \frac{g}{c_W}\bar{L}\gamma^\mu\left(c_W^2\frac{\tau_3}{2} - s_W^2 Y\right)LZ_\mu + e\bar{L}\gamma^\mu Q LA_\mu \\
&\quad - g\frac{s_W^2}{c_W}\bar{e}_R\gamma^\mu Y_R e_R Z_\mu + e\bar{e}_R\gamma^\mu Q e e_R A_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) + \\
&\quad + e\bar{e}_L\gamma^\mu Q e e_L A_\mu + e\bar{e}_R Q e e_R A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{s_W c_W}\bar{L}\gamma^\mu\left[(1 - s_W^2)\frac{\tau_3}{2} - s_W^2 Y\right]LZ_\mu - \frac{e}{s_W c_W}\bar{e}_R\gamma^\mu s_W^2 Y_R e_R Z_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) \\
&\quad + e\bar{e}P_R\gamma^\mu Q e P_L e A_\mu + e\bar{e}P_L Q e P_R e A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{s_W c_W}\bar{L}\gamma^\mu\left[\frac{\tau_3}{2} - s_W^2 Q\right]LZ_\mu - \frac{e}{s_W c_W}\bar{e}_R\gamma^\mu s_W^2 Y_R e_R Z_\mu \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + \frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L W_\mu^- \nu_L + \bar{\nu}_L W_\mu^+ e_L) \\
&\quad + e\bar{e}\gamma^\mu Q e e A_\mu \\
&\quad + \frac{e}{2s_W c_W}\bar{L}\gamma^\mu[\tau_3 - 2Qs_W^2]LZ_\mu - \frac{e}{2s_W c_W}\bar{e}_R\gamma^\mu 2s_W^2 Q e e_R Z_\mu
\end{aligned} \tag{6.31}$$

De modo que

$$\mathcal{L}_{lWB} = i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + i\bar{\nu}_e\gamma^\mu\partial_\mu\nu_e + \mathcal{L}_{cc} + \mathcal{L}_{nc} \tag{6.32}$$

donde

$$\mathcal{L}_{nc} = eJ_{EM}^\mu A_\mu + \frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}J_{NC}^\mu Z_\mu \tag{6.33}$$

donde ahora

$$J_{EM}^\mu = \bar{e}\gamma^\mu Q e = -\bar{e}\gamma^\mu e \tag{6.34}$$

y

$$J_{NC}^\mu = \sum_{\Psi=L,e_R} \bar{\Psi}\gamma^\mu(\tau^3 - 2Q\sin^2\theta_W)\Psi. \tag{6.35}$$

En términos de los fermiones usuales

$$\begin{aligned}
J_{NC}^\mu &= \bar{L}\gamma^\mu [\tau_3 - 2Qs_W^2] L - \frac{e}{2s_Wc_W} \bar{e}_R\gamma^\mu 2s_W^2 Q_e e_R \\
&= (\bar{\nu}_L \quad \bar{e}_L) \gamma^\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 + 2s_W^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R\gamma^\mu 2s_W^2 e_R \\
&= \bar{\nu}\gamma^\mu P_L \nu + \bar{e}\gamma^\mu (-1 + 2s_W^2) P_L e + \bar{e}\gamma^\mu 2s_W^2 P_R e \\
&= \bar{\nu}\gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_5}{2}\right) \nu + \bar{e}\gamma^\mu (-1 + 2s_W^2) \frac{(1 - \gamma_5)}{2} e + \bar{e}\gamma^\mu 2s_W^2 \frac{(1 + \gamma_5)}{2} e \\
&= \bar{\nu}\gamma^\mu \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma_5}{2}\right) \nu + \bar{e}\gamma^\mu \left(-\frac{1}{2} + 2s_W^2 + \frac{1}{2}\gamma_5\right) e
\end{aligned} \tag{6.36}$$

$$J_{NC}^\mu = \sum_{f=e,\nu_e} \bar{f}\gamma^\mu (v_f - a_f\gamma_5) f, \tag{6.37}$$

donde  $2v_e = -1 + 4\sin^2\theta_W$ ,  $2a_e = -1$ ,  $v_{\nu_e} = a_{\nu_e} = 1$ .

Igual que en el caso de  $SU(3)_C$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cc} &= \frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^- + \bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+] \\
&= \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_e W_\mu^- + \bar{\nu}_e\gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+]
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Para el término de Yukawa

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fH} &= h_e (\bar{L}\Phi e_R + \bar{e}_R\Phi^\dagger L) \\
&= \frac{h_e}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) (H + v) \\
&= m_e \bar{e}e + \frac{h_e}{\sqrt{2}} \bar{e}eH \\
&= m_e \bar{e}e + m_e \bar{e}e \frac{H}{v} \\
&= m_e \bar{e}e \left(1 + \frac{H}{v}\right).
\end{aligned} \tag{6.39}$$

donde

$$m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}}. \tag{6.40}$$

De modo que el mismo mecanismo que da cuenta de la masa de los bosones gauge, da cuenta de la masa de los fermiones y entrega una interacción con la que se puede comprobar experimentalmente el modelo. Encontrar estas interacciones del Higgs con los fermiones y con los bosones gauge es el principal objetivo del LHC.

Como se vió en la sección 4.4 los términos cinéticos de los bosones gauge se pueden escribir en términos de  $W^\pm$ ,  $Z_\mu$  y  $A_\mu$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{WB} &= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \mathcal{L}_3 - \mathcal{L}_4
\end{aligned} \tag{6.41}$$

donde

$$(F_W)_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \quad (6.42)$$

y  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_4$  están dados en [18]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3 = & -ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & -\frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu). \end{aligned} \quad (6.44)$$

En resumen el Lagrangiano invariante gauge local bajo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  dado en la ec. (6.16), escrito en el gauge unitario es ( $f = e, \nu_e$ , y tal que para  $f = \nu_e$ ,  $f' = e$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{EW}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H \\ & - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\ & + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_{f=\nu_e} \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\ & - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ & - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu). \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde  $m_{\nu_e} = 0$ .

### 6.1.1. Dispersión electron–neutrino

Comparando con el Lagrangiano efectivo de la dispersión  $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$  se obtiene

$$v = \left( \sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV}. \quad (6.46)$$

## 6.2. Modelo Estándar

### 6.2.1. Primera generación

Introduciendo los quarks  $u$  y  $d$ , tenemos como contenido de partículas

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, & e_R \\ Q^\alpha &= \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix}, & u_R^a, \quad d_R^\alpha \end{aligned} \quad (6.47)$$

donde  $\alpha$  es el índice de color. Productos del tipo  $\overline{u}_L^\alpha u_L^\alpha$  serán denotados simplemente como  $\overline{u}_L u_L$ . Además

$$\begin{aligned} \nu_L &= P_L \nu_e, & e_{L,R} &= P_{L,R} e \\ u_{L,R} &= P_{L,R} u, & d_{L,R} &= P_{L,R} d. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Como antes, el término  $\overline{Q}\Phi$  es invariante bajo  $SU(2)_L$ . Hemos mostrado en problema 3.6. que si  $\overline{Q}\Phi$  es un invariante  $SU(2)$ , el término  $\tilde{\Phi}^\dagger Q$  también es un invariante de  $SU(2)$ . Explícitamente

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^\dagger Q &= (i\tau_2 \Phi^*)^\dagger Q \\ &= \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}^\dagger Q \\ &= (\phi^0 \quad -\phi^+) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \\ &= \phi^0 u_L - \phi^+ d_L \\ &= \epsilon_{12} Q_1 \Phi_2 + \epsilon_{21} Q_2 \Phi_1 \\ &= \epsilon_{ab} Q_a \Phi_b. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Bajo una transformación  $SU(2)_L$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^\dagger Q \rightarrow \tilde{\Phi}'^\dagger Q' &= \epsilon_{ab} Q'_a \Phi'_b = \epsilon_{ab} U_{ac} U_{bd} Q_c \Phi_d \\ &= \epsilon_{cd} \det \mathbf{U} Q_c \Phi_d \\ &= \epsilon_{cd} Q_c \Phi_d \\ &= \tilde{\Phi}^\dagger Q. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Las hipercargas se obtienen de

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u_L \\ -\frac{1}{3} d_L \end{pmatrix} &= (T_3 + Y_Q) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + Y_Q) u_L \\ (-\frac{1}{2} + Y_Q) d_L \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \times \phi^{0*} \\ -(-\phi^-) \end{pmatrix} &= (T_3 + Y_{\tilde{\Phi}}) \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2} + Y_{\tilde{\Phi}}) \phi^{0*} \\ (-\frac{1}{2} + Y_{\tilde{\Phi}}) (-\phi^-) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.51)$$

Entonces

$$Y_Q = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = 1/6, \quad Y_{\tilde{\Phi}} = -\frac{1}{2}, \quad Y_{u_R} = \frac{2}{3}, \quad Y_{d_R} = -\frac{1}{3}. \quad (6.52)$$

Bajo hipercarga

$$\begin{aligned}\bar{Q}\Phi &\rightarrow e^{i(1/3)\alpha}\bar{Q}\Phi \\ \tilde{\Phi}^\dagger Q &\rightarrow e^{i(2/3)\alpha}\tilde{\Phi}^\dagger Q\end{aligned}\tag{6.53}$$

Entonces podemos construir los invariantes bajo  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= h_d \bar{Q} \Phi d_R + h_u \bar{u}_R \tilde{\Phi}^\dagger Q + \text{h.c} \\ &= h_d \bar{Q} \Phi d_R + h_u \bar{u}_R \tilde{\Phi}^\dagger Q + h_d \bar{d}_R \Phi^\dagger Q + h_u \bar{Q} \tilde{\Phi} u_R \\ &= h_d \bar{Q} \Phi d_R + h_u \bar{Q} \tilde{\Phi} u_R + \text{h.c}\end{aligned}\tag{6.54}$$

Recuerde que  $\bar{Q}\Phi d_R = \bar{Q}_\alpha \Phi d_R^\alpha$ . El Lagrangiano invariante gauge local bajo  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  es entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & i \sum_{\Psi=L,e_R,Q,u_R,d_R} \bar{\Psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \Psi \\ & - (h_e \bar{L} \Phi e_R + h_d \bar{Q} \Phi d_R + h_u \bar{Q} \tilde{\Phi} u_R + \text{h.c}) \\ & - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ & + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.\end{aligned}\tag{6.55}$$

Donde

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_i^\mu - ig' Y B^\mu.\tag{6.56}$$

En el gauge unitario

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix} \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \\ 0 \end{pmatrix},\tag{6.57}$$

$f =$	$u$	$d$	$\nu_e$	$e$
$2v_f$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$1$	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$
$2a_f$	$1$	$-1$	$1$	$-1$

Tabla 6.1: Acoplamientos de corrientes neutras

y utilizando los resultados para la Cromodinámica Cuántica de la sección 5.3, el Lagrangiano para  $f = \nu_e, e, u, d, q = u, d$  y  $f' = e (d)$  para  $f = \nu_e (u)$  es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left( \frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\
& + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\
& - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \tag{6.58}
\end{aligned}$$

donde

$$\tilde{G}^{\mu\nu} = \partial^\mu G_\nu - \partial^\nu G_\mu \tag{6.59}$$

En la tabla 6.1 se muestran los acoplamientos de las corrientes neutras.

### 6.2.2. Dinámica de sabor

El Modelo Estándar esta compuesto de las siguientes tres familias de fermiones  $i = 1, 2, 3$ . A cada familia se le asigna una carga de *sabor* diferente

$$\begin{aligned}
L_i = \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix} : & \quad L_1 = \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} & \quad L_2 = \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} & \quad L_3 = \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} & \quad e_R^i : e_R, \mu_R, \tau_R \\
Q_i^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^{i\alpha} \\ d_L^{i\alpha} \end{pmatrix} : & \quad Q_1^\alpha = \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix} & \quad Q_2^\alpha = \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix} & \quad Q_3^\alpha = \begin{pmatrix} t_L^\alpha \\ b_L^\alpha \end{pmatrix} & \quad u_R^i : u_R, c_R, t_R \\
& & & & \quad d_R^i : d_R, s_R, b_R. \tag{6.60}
\end{aligned}$$

Con

$$Y_{L_i} = -\frac{1}{2} \quad Y_{Q_i} = \frac{1}{6} \quad Y_{e_R^i} = -1 \quad Y_{u_R^i} = \frac{2}{3} \quad Y_{d_R^i} = -\frac{1}{3}. \tag{6.61}$$

De los procesos entre familias, es decir de cambio de sabor, sabemos que

- No se han observado procesos de corrientes neutras que cambian sabor.
- Los bosones gauge cargados  $W_\mu^\pm$  decaen siempre a leptones de la misma generación y con la misma intensidad.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_i \left( \overline{Q}'_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu Q'_i + \overline{L}'_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L'_i + \overline{e}_R{}^i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R{}^i + \overline{d}_R{}^i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R{}^i + \overline{u}_R{}^i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R{}^i \right) \\
& - (h_{ij}^E \overline{L}'_i \Phi e_{Rj}' + h_{ij}^D \overline{Q}'_i \Phi d_{Rj}' + h_{ij}^U \overline{Q}'_i \tilde{\Phi} u_{Rj}' + \text{h.c.}) \\
& - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
& + (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Para aclarar la notación, obviando de momento la definición definitiva de  $h_{ij}$  y las primas sobre los campos, consideremos el Lagrangiano de Yukawa para el sector down

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & h_{ij}^D \overline{d}_{Ri} \Phi^\dagger Q_j + \text{h.c.} \\
& \supset h_{ij}^D \overline{d}_{Ri} \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a Q_j^b + \text{h.c.} \\
& \supset h_{ij}^D \epsilon_{ab} \overline{d}_{Ri}^\alpha \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^b + \text{h.c.} \\
& \supset h_{ij}^D \epsilon_{ab} (d_{R\eta}^\dagger)_i^\alpha \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha\rho}^b + \text{h.c.},
\end{aligned} \tag{6.63}$$

donde  $i, a, \alpha, \eta$  son índices en los espacios de familia,  $SU(2)_L$ ,  $SU(3)_c$  y de Dirac, respectivamente. Por ejemplo el primer termino de la sumatoria

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & h_{11}^D (d_{R\eta}^\dagger)_1 \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^1 Q_{11\rho}^2 + \dots \\
& \supset h_{11}^D \overline{d}_R^r \phi^{0*} d_L^r + \dots
\end{aligned} \tag{6.64}$$

corresponde a la interacción de Yukawa del quark down rojo ( $r$ ) con un campo escalar complejo neutro en carga eléctrica pero de isospín débil 1/2. En forma compacta la primera expresión en la ec. (6.63) puede escribirse como

$$\mathcal{L} \supset \overline{\mathbf{d}}_R \mathbf{h}^D \Phi^\dagger \mathbf{Q} + \overline{\mathbf{Q}}_L \Phi \mathbf{h}^{D\dagger} \mathbf{d}_R \tag{6.65}$$

Retornado a la ec. (6.62), tenemos que para definir apropiadamente la masa de los quarks, rotamos de los autoestados de interacción a los autoestados de masa con la matrices unitarias

$$d_{R,Lj}' = (V_{R,L}^D)_{jk} d_{R,Lk} \quad \overline{d_{R,Lj}'} = \overline{d_{R,Lk}} (V_{R,L}^{D\dagger})_{kj} \tag{6.66}$$

Tal que

$$(V_{R,L}^{D\dagger})_{ij} (V_{R,L}^D)_{jk} = \delta_{ik} \quad (V_L^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_R^D)_{jl} = m_k^D \delta_{kl} \tag{6.67}$$

Con definiciones similares para los campos  $u_i$  y  $e_i$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &\supset \overline{d'_{Li}} \frac{h_{ij}^D v}{\sqrt{2}} d'_{Rj} \\
&= \overline{d'_{Li}} M_{ij}^D d'_{Rj} \\
&= \overline{d_{Lk}} (V_L^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_R^D)_{jl} d_{Rl} \\
&= \overline{d_{Lk}} m_k^D \delta_{kl} d_{Rl} \\
&= m_k^D \overline{d_{Lk}} d_{Rk}
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Para las diferentes combinaciones de términos de corrientes

$$\begin{aligned}
\overline{u'_{Li}} \gamma^\mu d'_{Li} &= \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^D)_{il} d_{Ll} \\
&= V_{kl} \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu d_{Ll} \\
\overline{\nu'_{Li}} \gamma^\mu e'_{Li} &= \overline{\nu_{Lj}} \gamma^\mu (V_L^E)_{ij} e_{Lj} \\
&= \overline{\nu_{Lj}} (V_L^E)_{ij} \gamma^\mu e_{Lj} \\
&= \overline{\nu_{Lj}} \gamma^\mu e_{Lj}
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Donde hemos definido la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) como

$$\begin{aligned}
V &= V_L^{U\dagger} V_L^D \\
V^\dagger V &= V_L^{D\dagger} V_L^U V_L^{U\dagger} V_L^D = \mathbf{1} \Rightarrow \sum_j V_{ij}^\dagger V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j V_{ji}^* V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j |V_{ji}|^2 = \sum_j |V_{ij}|^2 = 1
\end{aligned} \tag{6.70}$$

y los autoestados débiles de los neutrinos como

$$\nu'_{Li} = (V_L^{E\dagger})_{ij} \nu_{Lj} \tag{6.71}$$

Con esta definición, las corrientes débiles cargadas para los leptones siguen siendo universales. Similarmemente

$$\begin{aligned}
\overline{u'_{Li}} \gamma^\mu u'_{Li} &= \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^U)_{il} u_{Ll} \\
&= \delta_{kl} \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu u_{Ll} \\
&= \overline{u_{Lk}} \gamma^\mu u_{Lk}
\end{aligned} \tag{6.72}$$

De modo que todas las corrientes neutras permanecen universales después de la redefinición de los campos fermiónicos. A éste resultado, basado en la unitariedad de las transformaciones biunitarias se le llama *Mecanismo GIM*. En muchas extensiones del Modelo Estándar las matrices que transforman los fermiones a sus autoestados de masa no son unitarias y dan lugar a corrientes débiles neutras que cambian sabor (FCNC de sus siglas en inglés). Este tipo de procesos sin embargo, aún no han sido observados.

Teniendo en cuenta estos resultados podemos escribir finalmente el Lagrangiano completo del Modelo Estándar en la Gauge Unitario, para

$$f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b; \quad q = u, c, t, d, s, b; \quad l = e, \mu, \tau \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{SM}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ & + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left( 1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) + \left( m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left( 1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\ & + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left( \frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\ & + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_{l=e}^\tau \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \sum_{ij} V_{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_j W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\ & - ie \cot \theta_W \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[ (F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ & - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - \frac{1}{4} \left( g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \end{aligned} \quad (6.74)$$

donde  $m_{\nu_l} = 0$ .

### 6.3. Fenomenología Electrodébil

El Lagrangiano del Modelo contiene los parámetros  $g_s, g, \sin \theta_W, v, m_H$ . Alternativamente uno puede escoger como parámetros, en lugar de  $g, \sin \theta_W, v$  [5]

$$\begin{aligned} G_F &= 1.166\,371(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \\ \alpha^{-1} &= 137.035\,999\,679(94) \\ m_Z &= 91.1876(20) \text{ GeV} \\ \alpha_s(m_Z) &= 0.1176(20). \end{aligned} \quad (6.75)$$

donde  $\alpha_i = g_i^2/(4\pi)$ . Esto tiene la ventaja de usar las tres cantidades experimentales mejor medidas. Las relaciones

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}, \quad m_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F} \quad (6.76)$$

determinan entonces

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_W &= 0.212 \\ m_W &= 80.94 \text{ GeV}\end{aligned}\tag{6.77}$$

Si se usa  $\alpha(M_Z) \approx 1/128$  entonces

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta_W &= 0.233 \\ m_W &= 79.84 \text{ GeV}\end{aligned}\tag{6.78}$$

Los valores medidos son  $\sin^2 \theta_W = 0.23149(13)$ ,  $m_W = 80.398(25)$  GeV, y pueden ser reproducidos por el modelo estándar una vez se tienen en cuenta correcciones perturbativas inducidas por partículas virtuales.

El acelerador  $e^+e^-$  LEP, que funcionó hasta desde 1998 hasta el 2000 [27], operó a energías suficientes para producir millones de  $Z$ . Combinado con otros resultados experimentales, se pudo verificar todo el Lagrangiano del Modelo Estándar hasta un nivel del 1 por mil. Con excepción de las interacciones asociadas con el Higgs.

La universalidad de los decaimientos del  $Z$  está soportada por los resultados experimentales siguientes donde sólo se muestran los decaimientos leptónicos del  $Z$  diferentes de cero [5]

$$\begin{aligned}\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= 83.92(12) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 83.99(18) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 84.08(22) \text{ MeV} \\ \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= 3.363(4) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 3.366(7) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 3.370(8) \%\end{aligned}\tag{6.79}$$

Mientras que para el  $W^\pm$ , en %,

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = 10.65(17), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) = 10.59(15), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\tau \tau^-) = 11.44(22)\tag{6.80}$$

La diferencia de  $\bar{\nu}_\tau \tau$  respecto a los otros representa un efecto a  $2.8\sigma$ . La universalidad de los acoplamientos leptónicos de  $W$  puede comprobarse también indirectamente a través de los decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas. Los datos actuales verifican la universalidad de los acoplamientos de corrientes cargadas leptónicas al nivel del 0.2% [5]. Sin necesidad de entrar en detalles de los cálculos de las amplitudes de decaimiento, podemos usar el hecho de que ellas son proporcionales a los acoplamientos al cuadrado correspondiente, de modo que un cociente entre amplitudes de decaimiento es igual, en primera aproximación, a los cocientes de los acoplamientos al cuadrado. Tendremos en cuenta además que el Branching es la amplitud de decaimiento a un canal específico dividido por la suma de las amplitudes de decaimiento a todos los canales posibles.

Para los decaimientos del  $Z$  el Modelo Estándar predice, además de la ausencia de eventos del tipo  $Z \rightarrow e^+\mu^-$ , que para un cierto  $l = e, \mu, \tau$ , o  $q = d, s, b$

$$\begin{aligned}\frac{\text{Br}(Z \rightarrow l^+l^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{q}q)} &\approx \frac{(|v_l|^2 + |a_l|^2)}{N_c(|v_q|^2 + |a_q|^2)} \\ &= \frac{\left[(-\frac{1}{2} + 2\sin^2 \theta_W)^2 + \frac{1}{4}\right]}{N_c \left[(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin^2 \theta_W)^2 + \frac{1}{4}\right]} \\ &\approx \frac{0.776}{N_c} = \begin{cases} 0.338 & N_c = 2 \\ 0.225 & N_c = 3 \\ 0.169 & N_c = 4 \end{cases}\end{aligned}\tag{6.81}$$

Para ser comparado con el resultado experimental de por ejemplo

$$\frac{\text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{b}b)} = \frac{3.363(4)}{15.12(5)} \approx 0.222 \quad (6.82)$$

que de nuevo da lugar al  $N_c = 3$ , que seguiremos tomando en adelante.

Los Branchings de decaimiento en la ec. (6.80) y ec. (6.79) pueden ser calculados sin entrar en detalles del cálculo de las amplitudes. Teniendo en cuenta que el canal  $Z \rightarrow \bar{t}t$  esta cerrado

$$\begin{aligned} \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= \frac{\Gamma(Z \rightarrow e^+e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{\sum_l [(|v_l|^2 + |a_l|^2) + (|v_{\nu_l}|^2 + |a_{\nu_l}|^2)] + N_c [\sum_{i=1}^2 (|v_{u_i}|^2 + |a_{u_i}|^2) + \sum_{i=1}^3 (|v_{d_i}|^2 + |a_{d_i}|^2)]} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{3[ (|v_e|^2 + |a_e|^2) + (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)] + 3[2(|v_u|^2 + |a_u|^2) + 3(|v_d|^2 + |a_d|^2)]} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{21|a_e|^2 + 3[|v_e|^2 + |v_{\nu_e}|^2] + 3[2|v_u|^2 + 3|v_d|^2]} \\ &= \frac{(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1}{21 + 3[(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1] + 3[2(1 - \frac{8}{3}s^2\theta_W)^2 + 3(-1 + \frac{4}{3}s^2\theta_W)^2]} \\ &= \frac{2 - 8s^2\theta_W + 16s^4\theta_W}{42 - 80s^2\theta_W + \frac{320}{3}s^4\theta_W} \\ &\approx 3.43\% \end{aligned} \quad (6.83)$$

Para  $W^\pm$  tenemos por ejemplo

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{\Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \quad (6.84)$$

donde, teniendo en cuenta que los canales a top están cerrados, y usando la condición de unitariedad de la matriz CKM en ec. (6.70), tenemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{total}} &= \sum_l \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_l l^-) + N_c \sum_i [\Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_1 d_i) + \Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_2 d_i)] \\ &= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) \{3 + N_c \sum_i [ |V_{1i}|^2 + |V_{2i}|^2 ]\} \\ &= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) (3 + 2N_c) \end{aligned} \quad (6.85)$$

entonces

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3 + 2N_c} = 11.1\% \quad (6.86)$$

Una mejor predicción de dichos resultados en el contexto del Modelo Estándar requiere tener en cuenta las correcciones radiativas.

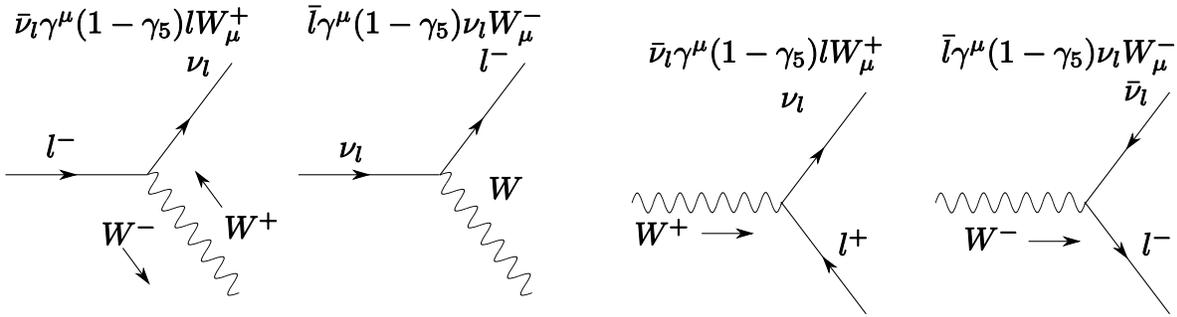


Figura 6.1: Diagramas de Feynman para las corrientes cargadas

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} &= \frac{\sum_l \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\
&= \frac{N_\nu \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\
&\approx \frac{N_\nu (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)}{|v_e|^2 + |a_e|^2} \\
&= \frac{2N_\nu}{(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)^2 + 1} \\
&\approx \begin{cases} 5.865 & N_\nu = 3 \\ 7.819 & N_\nu = 4 \end{cases}, \tag{6.87}
\end{aligned}$$

mientras que el valor medido experimentalmente para esta cantidad 5.942(16) [5], es una evidencia muy fuerte de que sólo existen tres neutrinos livianos.

### 6.3.1. Decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas

De las corrientes cargadas para leptones tenemos

$$\mathcal{L}_{cc} \supset \frac{g}{2\sqrt{2}} \left[ \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_l W_\mu^- \right] \tag{6.88}$$

Esto da lugar a los posibles diagramas para decaimientos de leptones a bosones virtuales, y bosones a leptones mostrados en la figura 6.1. Las flechas representan el flujo de número leptónico. La flecha de tiempo es de izquierda a derecha. Al lado izquierdo del vértice entran partículas y salen antipartículas. Mientras que al lado derecho entran antipartículas y salen partículas. Del primer y cuarto diagrama obtenemos el diagrama de Feynman para el decaimiento  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ , mostrado en la figura 6.2. El propagador para el bosón  $W$  de momentum  $q$  resulta ser

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 - m_W^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right). \tag{6.89}$$

Para los propósitos actuales la obtención de este resultado no es necesaria, el punto importante es que cuando las masas de las partículas iniciales y finales son mucho más pequeñas que  $m_W$ , esto se

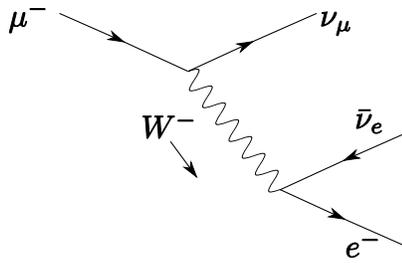


Figura 6.2: diagrama de Feynman para el decaimiento  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$

reduce a

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}. \quad (6.90)$$

Este resultado se entiende fácilmente cuando se compara con el propagador de una partícula escalar masiva  $1/(q^2 - M^2) \rightarrow -1/M^2$ . Las componentes espaciales de  $W_\mu$  con  $\mu = 1, 2, 3$ , a bajas energías tienen el mismo propagador que el de una partícula escalar, mientras  $W_0$ , tiene el signo opuesto.

El Lagrangiano efectivo para el decaimiento del muón,  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$  es entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{g^2}{8m_W^2} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\ &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e], \end{aligned} \quad (6.91)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8m_W^2} \\ &= \frac{g^2 4}{8g^2 v^2} \\ &= \frac{1}{2v^2}, \end{aligned} \quad (6.92)$$

y

$$v = \left( \sqrt{2} G_F \right)^{-1/2}. \quad (6.93)$$

De otro lado, para el decaimiento  $\beta$ ,  $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$ , de acuerdo a la figura 6.3, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} [\bar{p} \gamma^\mu (1 - 1.26 \gamma_5) n] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e]. \quad (6.94)$$

con  $G_F$  dado en la ec. (6.75) y  $G_\beta = 1.10 \times 10^{-5} \text{ GeV}^2$ . La corriente hadrónica tiene la forma  $V-1.26A$ . El factor 1.26 puede entenderse como debido a las correcciones a nivel hadrónico de una corriente

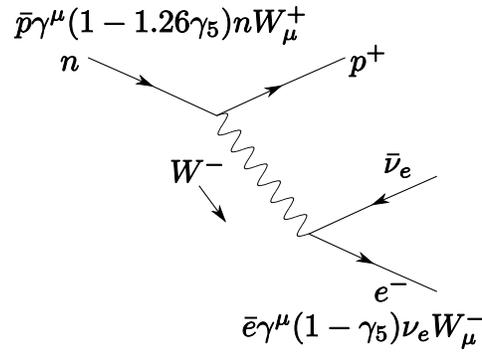


Figura 6.3: Decaimiento del neutrón.

que es de la forma V–A a nivel del quarks, como en la ec. (6.74). A nivel de quarks el decaimiento del neutrón ( $udd$ ) al protón ( $uud$ ) corresponde al decaimiento de uno de los quarks down del neutrón  $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{11} [\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)d] [\bar{e}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)\nu_e] . \quad (6.95)$$

De modo que  $G_\beta = G_F V_{11} = G_F \cos \theta_C$ , donde  $\theta_C$  es el ángulo de Cabbibo. Una vez se tienen en cuenta correcciones electrodébiles se obtiene el valor  $|V_{11}| = 0.97418(27)$ [23]. Las magnitudes de los elementos de la matriz CKM son[23]

$$V \approx \begin{pmatrix} 0.97419 & 0.2257 & 0.0359 \\ 0.2256 & 0.97334 & 0.0415 \\ 0.00874 & 0.0407 & 0.999133 \end{pmatrix} \sim \mathbf{1} \quad (6.96)$$

## 6.4. Cálculo de procesos

Se remite al lector al lector a la siguiente parte del curso “Standard Model and beyond”, de la página web

<http://gfif.udea.edu.co:2500>

En particular a las secciones iniciales de los Capítulos 1 y 2 donde se analizan el decaimiento  $W^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e$  y el decaimiento del muon.

## 6.5. Problemas

- 1 Demuestre explícitamente la ec. (6.33)



# Apéndice A

## Soluciones a los problemas

### Capítulo 2

2.1. De

$$a'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} a^{\nu} \quad (\text{A.1})$$

tenemos que

$$a'_{\rho} = g_{\mu\rho} a'^{\mu} = g_{\mu\rho} \Lambda^{\mu}_{\nu} g^{\nu\eta} a_{\eta} = \Lambda_{\rho}^{\eta} a_{\eta} \quad (\text{A.2})$$

De la definición de transformación de Lorentz

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = a^{\mu} b_{\mu} \quad (\text{A.3})$$

tenemos

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} a^{\nu} b_{\rho} = a^{\nu} b_{\nu} = \delta_{\nu}^{\rho} a^{\nu} b_{\rho} \quad (\text{A.4})$$

de donde

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \Lambda_{\mu}^{\rho} = \delta_{\nu}^{\rho} \quad (\text{A.5})$$

2.3.

$$r \sim \frac{1}{m} \approx \frac{1}{80 \text{ GeV}} \times \frac{1 \text{ GeV}}{1/(1.97 \times 10^{-16} \text{ m}^{-1})} \approx 2.5 \times 10^{-18} \text{ m} \quad (\text{A.6})$$

### Capítulo 3

3.6 Tenemos

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^- \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Haremos la parte correspondiente al término de masa. Para el término cinético es igual.

$$\begin{aligned} -m^2 \tilde{\Phi}^{\dagger} \tilde{\Phi} &= -m^2 \begin{pmatrix} \phi^0 & -\phi^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \\ &= -m^2 (\phi^0 \phi^{0*} + \phi^+ \phi^-) \\ &= -m^2 \Phi^{\dagger} \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

de modo que  $\Phi$  y  $\tilde{\Phi}$  son representaciones equivalentes de  $SU(2)$ .

Además

$$\begin{aligned} -m^2 \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a \Phi^b &= -m^2 (\epsilon_{12} \tilde{\Phi}^1 \Phi^2 + \epsilon_{21} \tilde{\Phi}^2 \Phi^1) = -m^2 (\phi^{0*} \phi^0 + \phi^+ \phi^-) \\ &= -m^2 \Phi^\dagger \Phi \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

3.8 De las ecs. (3.259) y (3.260)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} (\delta_{kl} \delta_{im} - \delta_{km} \delta_{il}) W_k^\mu W_\mu^l \phi_m - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^{*i} W_k^\mu W_\mu^k \phi_i - g^2 \phi^{*i} W_k^\mu W_\mu^i \phi_k - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i \\ &= \partial^\mu \phi^* \cdot \partial_\mu \phi - g [\phi^* \cdot \mathbf{W}_\mu \times \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \phi] \\ &\quad + g^2 \phi^* \cdot \phi \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu - g^2 \phi^* \cdot \mathbf{W}^\mu \mathbf{W}_\mu \cdot \phi - m^2 \phi^* \cdot \phi - \frac{1}{4} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}_{\mu\nu} &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^l W_\nu^m \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^j W_\nu^k - W_j^\mu W_k^\nu W_\mu^k W_\nu^j) \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\nu \cdot \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \\ &= (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot (\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu) + 2g (\partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\mu) \cdot \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu \\ &\quad + g^2 (\mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\mu \mathbf{W}^\nu \cdot \mathbf{W}_\nu - \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu \mathbf{W}^\mu \cdot \mathbf{W}_\nu) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

3.9

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \\ &= -\frac{1}{4} [\partial^\mu (-sZ^\nu + cA^\nu) - \partial^\nu (-sZ + cA)^\mu] [\partial_\mu (-sZ + cA)_\nu - \partial_\nu (-sZ + cA)_\mu] \\ &= -\frac{1}{4} [-s\partial^\mu Z^\nu + c\partial^\mu A^\nu + s\partial^\nu Z^\mu - c\partial^\nu A^\mu] [-s\partial_\mu Z_\nu + c\partial_\mu A_\nu + s\partial_\nu Z_\mu - c\partial_\nu A_\mu] \\ &= -\frac{1}{4} [-s(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] [-s(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{4} [-s(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + c(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] [-s(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \\ &= -\frac{1}{4} [s^2 (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + c^2 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad - 2sc (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Similarmente, reemplzando  $s^2 \leftrightarrow c^2$  y  $s \rightarrow -s$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} W_3^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^3 &\supseteq -\frac{1}{4} [c^2 (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + s^2 (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ &\quad + 2sc (\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)] \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$-\frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_3^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^3 \supset = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} \quad (\text{A.14})$$

De otro lado, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= \frac{W_\mu^1 - iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^- &= \frac{W_\mu^1 + iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^+ + W_\mu^- &= \frac{2}{\sqrt{2}}W_\mu^1 = \sqrt{2}W_\mu^1 \\ W_\mu^- - W_\mu^+ &= \frac{2}{\sqrt{2}}W_\mu^2 = \sqrt{2}iW_\mu^2 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= \frac{W_\mu^- + W_\mu^+}{\sqrt{2}} \\ W_\mu^2 &= \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{\sqrt{2}i} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 - \frac{1}{4}W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 &\supset -\frac{1}{4}[(\partial^\mu W_1^\nu - \partial^\nu W_1^\mu)(\partial_\mu W_\nu^1 - \partial_\nu W_\mu^1) \\ &\quad + (\partial^\mu W_2^\nu - \partial^\nu W_2^\mu)(\partial_\mu W_\nu^2 - \partial_\nu W_\mu^2)] \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 - \partial^\nu W_1^\mu \partial_\mu W_\nu^1 + \partial^\nu W_1^\mu \partial_\nu W_\mu^1) \\ &\quad + (1 \rightarrow 2)\} \\ &= -\frac{1}{4}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1 + \partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1) \\ &\quad + (1 \rightarrow 2)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{(\partial^\mu W_1^\nu \partial_\mu W_\nu^1 - \partial^\mu W_1^\nu \partial_\nu W_\mu^1) + (\partial^\mu W_2^\nu \partial_\mu W_\nu^2 - \partial^\mu W_2^\nu \partial_\nu W_\mu^2)\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[(\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- + \partial_\nu W_\mu^+)] \\ &\quad + i^2[(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^+)]\} \\ &= -\frac{1}{4}\{[(\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- + \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu + \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- + \partial_\nu W_\mu^+)] \\ &\quad - [(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\mu W_\nu^- - \partial_\mu W_\nu^+) \\ &\quad - (\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\mu W_+^\nu)(\partial_\nu W_\mu^- - \partial_\nu W_\mu^+)]\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Teniendo en cuenta que los terminos cruzados son los únicos que no se cancelarán, tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}W_1^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^1 - \frac{1}{4}W_2^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^2 &\supset -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu \partial_\mu W_\nu^+ + \partial^\mu W_+^\nu \partial_\mu W_\nu^- - \partial^\mu W_-^\nu \partial_\nu W_\mu^+ - \partial^\mu W_+^\nu \partial_\nu W_\mu^-] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\mu W_-^\nu - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W_-^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) + \partial_\nu W_\mu^+ \partial^\nu W_-^\mu - \partial_\mu W_\nu^+ \partial^\nu W_-^\mu] \\
&= -\frac{1}{2}[\partial^\mu W_-^\nu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+) - \partial^\nu W_-^\mu (\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2}[(\partial^\mu W_-^\nu - \partial^\nu W_-^\mu)(\partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+)] \\
&= -\frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu}. \tag{A.18}
\end{aligned}$$

## Capítulo 6

6.1. Haciendo un análisis similar al de la sección 3.6, tenemos de la ec. (6.10) que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fWB} &= i\bar{L}\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\
&= (i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \quad i\bar{e}_L\gamma^\mu) \begin{pmatrix} \partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu & -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & \partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \\
&\quad + i\bar{e}_R\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu) e_R \\
&= (i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \quad i\bar{e}_L\gamma^\mu) \begin{pmatrix} (\partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L - \frac{i}{\sqrt{2}}ge_L W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}g\nu_L W_\mu^- + (\partial_\mu - igT_3^\dagger W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L \end{pmatrix} + i\bar{e}_R\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu) e_R \\
&= i\bar{\nu}_L\gamma^\mu (\partial_\mu - igT_3^\nu W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}g\bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^- + i\bar{e}_L\gamma^\mu (\partial_\mu - igT_3^e W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu (\partial_\mu - ig'Y_R B_\mu) e_R \\
&= i\bar{e}_L\gamma^\mu \partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu \partial_\mu e_R + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g (\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^-) \\
&\quad + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu (-igT_3^\nu W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)\nu_L + i\bar{e}_L\gamma^\mu (-igT_3^e W_\mu^3 - ig'Y_L B_\mu)e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu (-ig'Y_R B_\mu) e_R \\
&= i\bar{\psi}_e\gamma^\mu \partial_\mu \psi_e + i\bar{\nu}_L\gamma^\mu \partial_\mu \nu_L + \frac{1}{\sqrt{2}}g (\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \text{h.c.}) + \mathcal{L}_{fAZ} \tag{A.19}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{fAZ} &= \bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L (gT_3^\nu W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L (gT_3^e W_\mu^3 + g'Y_L B_\mu) + g'\bar{e}_R\gamma^\mu e_R (Y_R B_\mu) \\
&= g [\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L (T_3^\nu W_\mu^3 + \tan\theta_W Y_L B_\mu) + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L (T_3^e W_\mu^3 + \tan\theta_W Y_L B_\mu) + Y_R \tan\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R B_\mu] \\
&= g \{ \bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L [T_3^\nu (\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + \tan\theta_W Y_L (-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)] \\
&\quad + \bar{e}_L\gamma^\mu e_L [T_3^e (\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu) + \tan\theta_W Y_L (-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)] \\
&\quad + Y_R \tan\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R (-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu) \} \\
&= \frac{g}{\cos\theta_W} [(T_3^\nu \cos^2\theta_W - Y_L \sin^2\theta_W)\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L \\
&\quad + (T_3^e \cos^2\theta_W - Y_L \sin^2\theta_W)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + (0 \times \cos\theta_W - Y_R \sin^2\theta_W \bar{e}_R\gamma^\mu e_R) Z_\mu \\
&\quad + g \sin\theta_W [(T_3^\nu + Y_L)\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L + (T_3^e + Y_L)\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + (0 + Y_R)\bar{e}_R\gamma^\mu e_R] A_\mu. \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Como  $T_3^f \cos^2 \theta_W - Y_f \sin^2 \theta_W = T_3 - (T_3^f + Y_f) \sin^2 \theta_W$ , entonces usando  $Q_f = T_3^f + Y_f$ , y  $e = g \sin \theta_W$  tenemos

$$\mathcal{L}_{fAZ} = \sum_{f=e_L, \nu_L, e_R} \left[ \frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T_3^f - Q_f \sin^2 \theta_W) Z_\mu + e Q_f A_\mu \right] \bar{f} \gamma^\mu f \quad (\text{A.21})$$

Como  $Q_\nu = 0$ , claramente los neutrinos no se acoplan a los fotones como se esperaba y además se obtiene la corriente electromagnética apropiada, ya que

$$\sum_{f=e_L, \nu_L, e_R} e Q_f A_\mu \bar{f} \gamma^\mu f = e Q_e \bar{\psi}_e \gamma^\mu \psi_e A_\mu. \quad (\text{A.22})$$



# Bibliografía

- [1] Modern Elementary Particle Physics, Gordon Kane, Perseus Publishing, 1993.
- [2] An Introduction to Standard Model of Particle Physics. W.N Cottingham and D.A. Greenwood, Cambridge University Press, 1988
- [3] Quantum Field Theory, L.H Reyder, Cambridge University Press
- [4] Quantum Field Theory, F. Mandl, G. Shaw, John Wiley & Sons, INC. 1993
- [5] A. Pich, The Standard Model of Electroweak Interactions, hep-ph/0502010
- [6] The Standard Model: Alchemy and Astrology, hep-ph/0609274
- [7] Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Franz Gross, John Wiley & Sons, INC. 1993
- [8] [http://es.wikipedia.org/wiki/Principio\\_de\\_m%C3%ADnima\\_acci%C3%B3n](http://es.wikipedia.org/wiki/Principio_de_m%C3%ADnima_acci%C3%B3n),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Action\\_%28physics%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Action_%28physics%29)
- [9] <http://www.eftaylor.com/software/ActionApplets/LeastAction.html>
- [10] [http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes\\_de\\_Newton#Segunda\\_Ley\\_de\\_Newton\\_o\\_Ley\\_de\\_la\\_Fuerza](http://es.wikipedia.org/wiki/Leyes_de_Newton#Segunda_Ley_de_Newton_o_Ley_de_la_Fuerza),  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s\\_laws\\_of\\_motion](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_laws_of_motion)
- [11] Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory, Franz Gross, Wiley Interscience, 1993, Chapter 1.
- [12] [http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_de\\_la\\_divergencia](http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_la_divergencia)
- [13] <http://en.wikipedia.org/wiki/D%27Alembertian>
- [14] A. S. Goldhaber and M. M. Nieto, “Terrestrial and extra-terrestrial limits on the photon mass,” Rev. Mod. Phys. **43** (1971) 277.
- [15] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” J. Phys. G **33**, 1 (2006).
- [16] [http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli\\_matrices](http://en.wikipedia.org/wiki/Pauli_matrices)
- [17] P. W. Higgs, “BROKEN SYMMETRIES AND THE MASSES OF GAUGE BOSONS,” Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508. P. W. Higgs, “Spontaneous Symmetry Breakdown Without Massless Bosons,” Phys. Rev. **145** (1966) 1156.

- [18] A. Pich, “The standard model of electroweak interactions,” arXiv:hep-ph/0502010, Published in \*Sant Feliu de Guixols 2004, European School of High-Energy Physics\* 1-48.
- [19] [http://en.wikipedia.org/wiki/Natural\\_units](http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_units)
- [20] [http://en.wikipedia.org/wiki/Plank\\_units](http://en.wikipedia.org/wiki/Plank_units)
- [21] I. J. R. Aitchison and A. J. G. Hey, “Gauge theories in particle physics: A practical introduction. Vol. 1: From relativistic quantum mechanics to QED,” *Bristol, UK: IOP (2003) 406 p*
- [22] <http://groups.google.com/group/sci.physics.research/msg/e6cc1b288df8bbb2>
- [23] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” *J. Phys. G* **33** (2006) 1.
- [24] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” *Cambridge, Uk: Univ. Pr. ( 1985) 443p*
- [25] [http://en.wikipedia.org/wiki/Gell-MannNishijima\\_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Gell-MannNishijima_formula)
- [26] [http://en.wikipedia.org/wiki/Spin\\_\(physics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Spin_(physics))
- [27] <http://en.wikipedia.org/wiki/LEP>
- [28] <http://en.wikipedia.org/wiki/Muon>
- [29] <http://blogs.uslhc.us/?p=481>