



# Capítulo 4

## Ruptura espontánea de simetría

### 4.1. Masa para el campo escalar

Escribamos el Lagrangiano para una partícula escalar real de masa  $m$  como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \quad (4.1)$$

con

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2. \quad (4.2)$$

Este Lagrangiano es simétrico bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ .

Si  $\mu^2 > 0$  el campo tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial que cuestan energía y dicho término se interpreta como la masa de la partícula. Ver figura 4.1. En Teoría Cuántica de Campos al estado de mínima energía se le llama el vacío y las excitaciones alrededor del vacío corresponden a las partículas.

Si  $\mu^2 < 0$ , no existe un mínimo del potencial alrededor del cual el campo pueda oscilar. Además el alejamiento del campo del punto de simetría del potencial no cuesta energía. Por consiguiente en ese caso, el término de interacción

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \quad \mu^2 < 0, \quad (4.3)$$

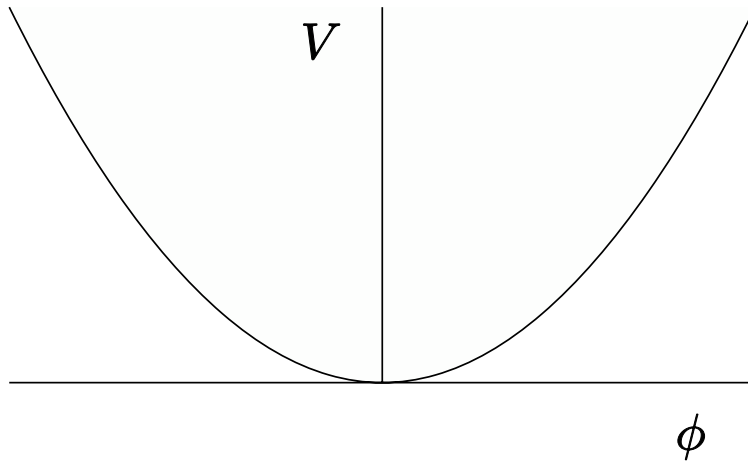


Figura 4.1:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$  con  $\mu^2 > 0$

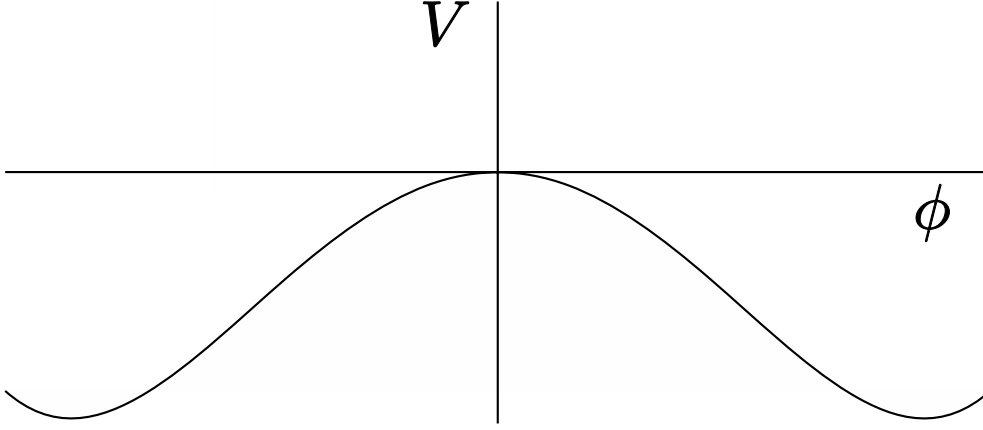


Figura 4.2:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ . Simetría exácta

Figura 4.3:  $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$  con  $\mu^2 < 0$ , y  $\lambda > 0$ . Simetría espontáneamente rota.

no puede interpretarse como un término de masa en el Lagrangiano dado por la ec. (4.1).

Consideremos ahora el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (4.4)$$

que mantiene la simetría bajo la transformación discreta  $\phi \rightarrow -\phi$ .  $\lambda > 0$  garantiza la aparición de los dos mínimos que se muestran en la figura 4.2. Si la energía es suficientemente alta como se muestra en la figura 4.2, las excitaciones son simétricas con respecto al máximo del potencial y el término en  $\mu^2$  no puede interpretarse como masa para la partícula escalar.

Sin embargo, si la energía es suficientemente baja como se muestra en la figura 4.3, las excitaciones alrededor del mínimo dan lugar a la aparición de un término de masa para el campo escalar. Además, dichas excitaciones no respetan la simetrías  $\phi \rightarrow -\phi$ . En tal caso decimos que la simetría ha sido espontáneamente rota: aunque el Lagrangiano mantiene la simetría original, el vacío la rompe.

Para analizar cuantitativamente el espectro de partículas es necesario expandir el campo alrededor del mínimo y determinar las excitaciones. Establezcamos en primer lugar los mínimos del potencial. La  $\partial V/\partial\phi = 0$  da lugar a

$$\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (4.5)$$

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0, \quad (4.6)$$

con extremos  $\phi_{\max} = 0$ , y

$$\phi_{\min} \equiv \langle\phi\rangle \equiv v = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (4.7)$$

De hecho

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi^2. \quad (4.8)$$

$\phi = 0$  corresponde a un máximo, mientras que la segunda derivada para  $\phi = \pm\sqrt{-\mu^2/\lambda}$  es  $-2\mu^2 > 0$  y corresponden a los mínimos. Expandiendo el campo alrededor del mínimo

$$\phi(x) = H(x) + v \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 + \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda(H^2 + 2vH + v^2)^2 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 2H^2(2vH + v^2) + (2vH + v^2)^2] \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 2H^2v^2 + 4v^2H^2 + 4v^3H + v^4] \\
&= \frac{1}{2}\mu^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\
&= \frac{1}{2}\mu^2H^2 - \frac{3}{2}H^2\mu^2 + \mu^2vH - \mu^2vH + \frac{1}{2}\mu^2v^2 - \frac{1}{4}\mu^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3] \\
V(H) &= \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \frac{1}{4}\mu^2v^2,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

y

$$\mathcal{L}_H = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2)H^2 - \lambda vH^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}. \tag{4.11}$$

Entonces  $H$  adquiere una masa  $-2\mu^2$  y no es invariante bajo  $H \rightarrow -H$ .

Otro método es usar las ecuaciones de mínimo  $-\mu^2 = \lambda v^2$ , para eliminar un parámetro del potencial:

$$\begin{aligned}
V(\phi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \\
&= -\frac{1}{2}\lambda v^2(H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda[H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\
&= \lambda v^2H^2 + \lambda vH^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

## 4.2. Bosón de Goldstone

Consideremos ahora un campo escalar complejo sin término de masa, pero con potencial:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi) \tag{4.13}$$

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \tag{4.14}$$

La simetría del Lagrangiano corresponde a  $U(1)$  global. Este potencial corresponde al “sombrero mexicano”. Para una energía suficientemente baja de manera que el campo deba oscilar alrededor del mínimo aparecen dos tipos de excitaciones. Una sobre las paredes que cuestan energía y corresponden a un campo escalar cargado como en el caso anterior, y otra a lo largo de la circunferencia de mínimo, que corresponde a una partícula escalar sin masa.

Analíticamente tenemos dos formas de abordar el análisis

### 4.2.1. Coordenadas cartesianas

Expandimos el campo alrededor del mínimo:

$$\phi = \phi^0 = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v + iG) \tag{4.15}$$

Entonces

$$V(\phi_1, \phi_2) = \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \tag{4.16}$$

La condición de mínimo es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= 0 \\
&= \frac{1}{2}\mu^2 (2\phi_1) + \frac{1}{4}\lambda 2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) 2\phi_1 \\
&= \phi_1 [\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)]
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= 0 \\
&= \phi_2 [\mu^2 + \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Los infinitos mínimos degenerados corresponden a la circunferencia

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 = \frac{-\mu^2}{\lambda} \tag{4.19}$$

El campo debe ser neutro pues, reemplazando (4.15) en la ec. (4.16)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2}\mu^2 [(H+v)^2 + G^2] - \frac{1}{4}\lambda [(H+v)^4 + 2(H+v)^2 G^2 + G^4] \\
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}\mu^2 (H+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda (H+v)^4 + \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda [2(H+v)^2 G^2 + G^4].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Usando la ec. (4.10), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2) H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda G^4 \\
&\quad - \frac{1}{2}\lambda [H^2 G^2 + 2v H G^2 + v^2 G^2] + \text{constant}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2}(-2\mu^2) H^2 - \lambda v H^3 - \frac{1}{4}\lambda H^4 \\
&\quad + \frac{1}{2}\partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{4}\lambda G^4 \\
&\quad - \lambda v H G^2 - \frac{1}{2}\lambda H^2 G^2 + \text{constant}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Como antes, el campo  $H$  tiene masa  $2|\mu^2|$ . El término en  $G^2$  ha desaparecido implicando que el campo  $G$  tiene masa cero. En este caso decimos que la invarianza  $U(1)$  de la acción ha sido espontáneamente rota

$$U = e^{iY\theta}, \tag{4.23}$$

donde  $Y$  es el generador de la transformación y  $\theta$  el parámetro. Después de la ruptura espontánea de la simetría diremos que el generador  $Y$  ha sido roto. El campo que adquiere masa recibe el nombre de *bosón de Higgs* [16], mientras que el campo sin masa es llamado *bosón de Goldstone*.

El *Teorema de Goldstone* establece que por cada generador roto de una simetría continua debe aparecer un bosón de Goldstone.

### 4.2.2. Coordenadas polares

Si hacemos

$$\phi = e^{i\eta(x)} \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \rho - i\rho \partial^\mu \eta) (\partial_\mu \rho + i\rho \partial_\mu \eta) - \frac{1}{2} \mu^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \lambda \rho^4 \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta - \frac{1}{2} \mu^2 \rho^2 - \frac{1}{2} \lambda \rho^4 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Haciendo  $\rho \rightarrow \rho + v$ , tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} \mu^2 (\rho + v)^2 - \frac{1}{2} \lambda (\rho + v)^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} v^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + 2v \rho \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho - \frac{1}{2} (-2\mu^2) \rho^2 - \lambda v \rho^3 - \frac{1}{4} \lambda \rho^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} v^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + 2v \rho \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta \end{aligned} \quad (4.26)$$

De nuevo no hay término de masa para  $\eta$ .

## 4.3. Masa para el bosón gauge

En el caso de la Acción invariante gauge local bajo el Grupo  $U(1)$ , tenemos el Lagrangiano (3.86):

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \mu^2 < 0 \text{ and } \lambda > 0 \quad (4.27)$$

Para obtener directamente el espectro después de la ruptura espontánea de simetría es conveniente usar la transformación gauge de la ec. (3.124). Haciendo  $\theta(x) = -\eta(x)$ :

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta(x)} e^{i\eta(x)} \left( \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) = \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' &= [(\mathcal{D}^\mu)' \phi']^* (\mathcal{D}_\mu)' \phi' - \mu^2 (\phi^*)' \phi' - \lambda [(\phi^*)' \phi']^2 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})' \\ &= \frac{1}{2} [\partial^\mu H + ig A'^\mu (H + v)] [\partial_\mu H - ig A'_\mu (H + v)] - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.29)$$

En adelante omitiremos las primas, aunque debe estar claro que se esta trabajando en el gauge específico de la ec. (4.28). Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu (H + v)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (4.30)$$

Usando la ec. (4.10)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{A^\mu} + \frac{1}{2} g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H, \quad (4.31)$$

donde  $\mathcal{L}_H$  esta dado por la ec. (4.11) y

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu. \quad (4.32)$$

Teniendo en cuenta la ec. (2.102) para el Lagrangiano de Proca, vemos que como consecuencia de la ruptura espontánea de simetría el campo gauge ha adquirido una masa

$$m_{A^\mu} = gv. \quad (4.33)$$

El mecanismo completo mediante el cual, a partir de un Lagrangiano invariante gauge local, los bosones gauge adquieren masa se llama *mecanismo de Higgs* [16]. La partícula escalar que adquiere masa se llama Higgs, mientras que el bosón de Goldstone es absorbido por campo gauge como modo longitudinal.

El número de grados de libertad independientes en el Lagrangiano original en la ec. (4.27) es cuatro. Correspondientes a los dos grados de libertad del bosón gauge no masivo y los dos del campo escalar complejo. En el Lagrangiano final en la ec. (4.31) no aparece el bosón de Goldstone. Sin embargo esto no es un problema porque dicho Lagrangiano también tiene cuatro grados de libertad correspondientes a los tres grados de libertad del bosón gauge masivo y al grado de libertad del bosón de Higgs.

Sin usar la transformación gauge en ec. (4.27), tenemos que para

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v + iG(x)) \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} [\partial^\mu H - i\partial^\mu G + igA^\mu(H+v) + gA^\mu G] [\partial_\mu H + i\partial_\mu G - igA_\mu(H+v) + gA_\mu G] \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}\lambda G^4 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H+v)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \{ \partial^\mu H + gA^\mu G + i[-\partial^\mu G + gA^\mu(H+v)] \} \{ \partial_\mu H + gA_\mu G - i[-\partial_\mu G + igA_\mu(H+v)] \} \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 G^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}\lambda G^4 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH + v^2) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu H + gA^\mu G)^2 + \frac{1}{2} [-\partial^\mu G + gA^\mu(H+v)]^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}\lambda G^4 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}\mu^2(H+v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(H+v)^4 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda G^4 - g\partial^\mu G A_\mu H + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H + g\partial^\mu H A_\mu G \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu G^2 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH) \\ &\quad + \frac{1}{2}\partial^\mu G\partial_\mu G + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^\mu A_\mu - gv\partial^\mu G A_\mu \\ &= \mathcal{L}_H - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{int}} + \mathcal{L}_2, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} &= -\frac{1}{4}\lambda G^4 - g\partial^\mu G A_\mu H + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H + g\partial^\mu H A_\mu G \\ &\quad + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu G^2 - \frac{1}{2}\lambda G^2(H^2 + 2vH) \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2}\partial^\mu G\partial_\mu G + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^\mu A_\mu - gv\partial^\mu G A_\mu \end{aligned} \quad (4.36)$$

Podemos interpretar  $\mathcal{L}_2$  como los términos de mezcla entre  $A^\mu$  y, para compensar el índice de Lorentz,  $\partial^\mu G$ . Podemos escribirlo en forma matricial como

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial^\mu G & A^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -gv \\ -gv & g^2 v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu G \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

con  $\tan \beta = 1/(gv)$ . Si

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu G \\ A_\mu \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} \partial_\mu G' \\ A'_\mu \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \frac{1}{2} (\partial^\mu G' \quad A'^\mu) \left[ V \begin{pmatrix} 1 & -gv \\ -gv & g^2 v^2 \end{pmatrix} V^T \right] \begin{pmatrix} \partial_\mu G' \\ A'_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu G' \quad A'^\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + g^2 v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu G' \\ A'_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (1 + g^2 v^2) A'^\mu A'_\mu. \end{aligned} \quad (4.40)$$

De nuevo, el bosón de Goldstone, en este caso  $\partial^\mu G'$ , es absorbido como modo longitudinal del  $A'_\mu$ .

## 4.4. Mecanismo de Higgs en un caso no Abelian

Consideremos ahora una Acción invariante gauge local bajo  $S(2) \times U(1)_Y$ . Esta corresponde al sector bosónico del Modelo Estándar de las partículas elementales. Generalizando el Lagrangiano en la ec. (3.197)

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (4.41)$$

con  $\mu^2 < 0$  y  $\lambda > 0$ . Además

$$\Phi \xrightarrow{SU(2) \times U(1)_Y} \Phi' = e^{i(\theta_j T^j + \alpha Y \cdot I)} \Phi, \quad (4.42)$$

y

$$\mathcal{D}_\mu = I \cdot \partial_\mu - ig W_\mu - ig' Y B_\mu = I \cdot \partial_\mu - ig T_i W_\mu^i - ig' Y B_\mu. \quad (4.43)$$

De la ec.(3.182)

$$W_\mu = T_i W_\mu^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- & -\frac{1}{2} W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

De modo que

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \left( \frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) & -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^- & \partial_\mu - i \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Sin pérdida de generalidad los cuatro grados de libertad de  $\Phi$ , pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{i\eta_j T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v) \end{pmatrix} \\ &\approx \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i\eta_3 & \sqrt{2} i\eta^+ \\ \sqrt{2} i\eta^- & 1 - i\eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\eta^+ H + v i\eta^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H + v - i\eta_3 H - i) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (h + v - iG^0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.46)$$



Para  $SU(2) \times U(1)_Y$  tenemos cuatro generadores y cuatro bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (4.46) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone, de manera que quedará un generador no roto correspondiente a una simetría remanente del vacío  $U(1)_Q$

$$SU(2) \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} U(1)_Q. \quad (4.47)$$

Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs, tres bosones gauge masivos, y un bosón gauge sin masa.

Para  $\alpha = 0$ , podemos hacer una transformación gauge usando la ec. (4.42) sobre el campo  $\Phi$ , tal que

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

que define el *gauge unitario*. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados  $\Phi'$  y  $W'_{\mu\nu}$ .

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} \right]^\dagger \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (4.49)$$

donde  $V(H)$  dado en la ec. (4.10), incluye el término de masa para el bosón de Higgs

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 \quad (4.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W^{\mu+} (H + v) \\ \partial^\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y B^\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} \right]^\dagger \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} \\ &\quad - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} g W^{\mu-} (H + v) & \partial^\mu H + i \left( -\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y B^\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix} \\ &\quad - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \partial^\mu H + i \left( -\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y B^\mu \right) (H + v) \right] \left[ \partial_\mu H - i \left( -\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g' Y B_\mu \right) (H + v) \right] \\ &\quad - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} g W_3^\mu + g' Y B^\mu \right)^2 (H + v)^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \left( \frac{gv}{4} \right)^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H + \mathcal{L}_{WB} \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{L}_{WB} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} g^2 W_3^\mu W_\mu^3 - \frac{1}{2} g g' Y W_3^\mu B_\mu - \frac{1}{2} g g' Y W_3^\mu B_\mu + g'^2 Y^2 B^\mu B_\mu \right)^2 (H^2 + 2vH + v^2) \quad (4.53)$$

Haciendo  $Y = 1/2$  como en la ec. (3.218),

$$\mathcal{L}_{WB} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} W_3^\mu & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \quad (4.54)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

con  $\tan \theta_W = g'/g$ , tal que  $g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$ , como en la ec. (3.208). Si (ver ec. (3.202)),

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

entonces

$$\mathcal{L}_{WB} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} Z^\mu & A^\mu \end{pmatrix} \left[ V^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} V \right] \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} (H^2 + 2vH + v^2) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} V^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} V &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & -g^2 g' - g'^3 \\ +g^2 g' - g^2 g' & -gg'^2 + gg'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^3 + gg'^2 & -g^2 g' - g'^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & g' \\ -g' & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g^2 + g'^2} \begin{pmatrix} g^4 + g^2 g'^2 + g^2 g'^2 + g'^4 & g^3 g' + gg'^3 - g^3 g' - gg'^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WB} &= \frac{1}{2} \left( \frac{g^2 + g'^2}{4} \right) Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_W) Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu (H^2 + 2vH + v^2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{gv}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu + \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \end{aligned} \quad (4.59)$$

Retornando a la ec. (4.52), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) - \frac{1}{2} \text{Tr} (W^{\mu\nu} W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} v g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu H^2 + \left( \frac{g}{2 \cos \theta_W} \right)^2 v Z^\mu Z_\mu H \\ &\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu, \end{aligned} \quad (4.60)$$

donde

$$m_W = \frac{gv}{2} \quad m_Z = \frac{gv}{2 \cos \theta_W}, \quad (4.61)$$

y

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \quad (4.62)$$

Los términos en  $W_{\mu\nu}^i$ , y  $B_{\mu\nu}$  pueden escribirse en términos de  $Z_\mu$  y  $A_\mu$  [5]. El Lagrangiano en ec. (4.41) tiene en total doce grados de libertad. Cuatro del doblete escalar complejo y ocho grados de libertad para los cuatro bosones gauge son masivos. El Lagrangiano final tiene doce grados de libertad, uno del bosón de Higgs, 9 para los bosones gauge masivos  $W_\mu^+$ ,  $W_\mu^-$ , y  $Z_\mu$  y dos del bosón gauge no masivo  $A_\mu$ . De nuevo, en el gauge unitario no aparecen los bosones de Goldstone explícitamente en el Lagrangiano. Estos han sido absorbidos como modos longitudinales de los tres bosones gauge masivos. Del teorema de Goldstone vemos que como efecto de la ruptura espontánea de simetría hay tres generadores rotos que dan lugar a los tres bosones de Goldstone. Queda un generador no roto asociado a un bosón gauge no masivo  $A_\mu$ , que es una combinación lineal de los campos gauge neutros.  $A_\mu$  corresponde al fotón y está asociado a una simetría gauge local abeliana remanente del vacío. Entonces, la ruptura espontánea de simetría ocurre de  $S(2) \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$ .

Los resultados de esta sección se obtienen del Lagrangiano en ec. (3.180) haciendo  $\phi^+ = 0$ , y  $\phi^0 = \phi^{0*} = (H + v)/\sqrt{2}$ . En tal caso  $\mathcal{L}_3 = 0$  en ec. (3.188).