Capítulo 1

Teoría Clásica de Campos

1.1. Principio de Mínima Acción

El Principio de Mínima acción establece, una vez fijado el espacio de coordenadas generalizadas sobre el espacio de configuración, que de todas las trayectorias posibles que transcurren entre t_1 y t_2, el sistema escogerá aquella que minimice la acción S [8]. La magnitud de la acción viene dada para cada trayectoria por la integral:

$$S\left[q_i, \dot{q}_i\right] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt \tag{1.1}$$

Donde: $q_i(t)$ son las coordenadas paramétricas de una trayectoria posible. $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, es la función lagrangiana del sistema.

Puede probarse mediante principios variacionales, que de todas las trayectorias posibles, la que hace estacionaria la anterior expresión es la que satisface la siguiente condición i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{1.2}$$

conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange. La demostración se hará más adelante para el caso en el que las coordenadas generalizadas corresponden a funciones de campo.

De momento mostraremos como la segunda ley de Newton [9], puede escribirse en la forma de la ec. (1.2).

$$\begin{aligned} F &= ma \qquad (1.3) \\ -\frac{\partial V(x)}{\partial x} &= m\frac{d^2x}{dt^2} \\ &= m\frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)\right] \end{aligned}$$

Podemos introducir el Lagrangiano a cada lado de la igualdad adicionando términos con la respectiva derivada parcial cero:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right)\right].$$

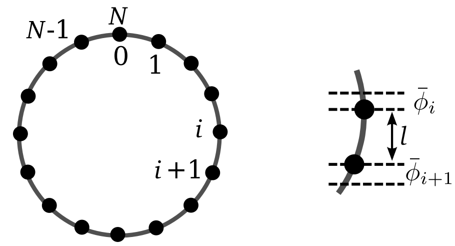

Figura 1.1: Modelo Cuerda

Reemplazando $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Una forma más rigurosa de escribir la ec. (1.3) puede encontrarse en [8]. Para una dimensión podemos definir la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \frac{\partial}{\partial q}L(q,\dot{q},t) \qquad \text{or} \qquad L(q,\dot{q},t) = \int \mathcal{L}(q,\dot{q},t)dq. \tag{1.4}$$

La ec. (1.1) puede escribirse entonces como

$$S\left[q_i,\dot{q}_i\right] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i(t),\dot{q}_i(t),t)\, dq\, dt. \tag{1.5}$$

Para sistemas continuos es conveniente usar la densidad Lagrangiana. Abordaremos a continuación el sistema continuo correspondiente a la cuerda clásica unidimensional para construir la densidad Lagrangiana correspondiente. A partir de ella demostraremos las ecuaciones de Euler Lagrange para dicho sistema.

1.2. La cuerda clásica unidimensional

Considere una cuerda de longitud L formando un círculo de radio R. Es conveniente considerar un conjunto de N partículas de masa m a lo largo de la circunferencia, unidas por resortes de longitud l y constante elástica k. Los modos vibracionales de la cuerda a lo largo de la circunferencia se obtienen en límite de $N \to \infty$ y $l \to 0$

De acuerdo a la figura 1.1, si $\bar{\phi}_i$ es el desplazamiento de la i–esima masa desde su posición de equilibrio, entonces el Lagrangiano del sistema de N particulas y resortes es:

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{\partial\bar{\phi}_i}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}k\sum_{i=0}^{N-1}\left(\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i\right)^2, \tag{1.6}$$

$$= \frac{1}{2}m\sum_{i=0}^{N-1}\left(\dot{\bar{\phi}}_i\right)^2 - \frac{1}{2}k\sum_{i=0}^{N-1}\left(\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i\right)^2. \tag{1.7}$$

Si μ es la densidad de la cuerda, T la tensión y v la velocidad, entonces

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{m}{l} \\ T &= kl \\ v^2 &= \frac{T}{\mu}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

(1.8) En el límite $l \to 0$ y $N \to \infty$, tenemos

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t) \to \bar{\phi}(z, t), \tag{1.9}$$

que representa la función de campo del desplazamiento de una masa infinitesimal de su posición de equilibrio. Entonces

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{l} l \left(\dot{\bar{\phi}}_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} (kl) l \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l}\right)^2. \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} \mu \left(\dot{\bar{\phi}}_i\right)^2 l - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1} T \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l}\right)^2 l.\end{aligned} \tag{1.10}$$

En el límite continuo $\sum(\cdots)\, l \to \int(\cdots)\, dz$, entonces

$$L = \int_0^L \frac{1}{2}\left[\mu \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}\right)^2 - T \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}\right)^2\right] dz = \int_0^L \mathcal{L} dz, \tag{1.11}$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t}\right)^2 - T \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1.12}$$

y

$$S = \int \mathcal{L}\, dt dz. \tag{1.13}$$

Definiendo

$$\phi = \sqrt{T}\bar{\phi}, \tag{1.14}$$

tenemos

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1.15}$$

Note que:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\right] = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)}\right] = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.17}$$

Si en la ec. (1.7), tomamos como coordenadas generalizadas las N $\dot{\bar{\phi}}_i$ y $\bar{\phi}_i$, entonces, podemos obtener las ecuaciones de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.2):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\phi}_i} = 0, \qquad i = 0 \text{ hasta } N - 1. \tag{1.18}$$

En el límite $l \to 0$ y $N \to \infty$, y usando las ecs. (1.16) y (1.17),

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\phi}}_i}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\dot{\bar{\phi}}_i\right) = m\frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2} \\
&= Tl\left(\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial t^2}\right) \\
&\to l\sqrt{T}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) \qquad (1.19) \\
&= l\sqrt{T}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\right]. \qquad (1.20)
\end{aligned}$$

Para el segundo término de la ec. (1.18) nótese que

$$\begin{aligned}
-\sum_{i=0}^{N-1}\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)^2 &= -\left(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_0\right)^2-\left(\bar{\phi}_2-\bar{\phi}_1\right)^2-\cdots-\left(\bar{\phi}_{(i-1)+1}-\bar{\phi}_{i-1}\right)^2-\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)^2-\cdots \\
&= -\left(\bar{\phi}_1-\bar{\phi}_0\right)^2-\left(\bar{\phi}_2-\bar{\phi}_1\right)^2-\cdots-\left(\bar{\phi}_i-\bar{\phi}_{i-1}\right)^2-\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)^2-\cdots \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_i}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)^2 &= -2\left(\bar{\phi}_i-\bar{\phi}_{i-1}\right)-2\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)\times(-1) \\
&=2l\left[\frac{\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i}{l}-\frac{\bar{\phi}_i-\bar{\phi}_{i-1}}{l}\right].
\end{aligned}$$

Si $\bar{z}_i$ es el punto medio del intervalo entre z_{i-1} y z_i, entonces

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_i}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)^2 &=2l^2\left(\frac{\partial\bar{\phi}(\bar{z}_{i+1},t)/\partial z}{l}-\frac{\partial\bar{\phi}(\bar{z}_i,t)/\partial z}{l}\right) \\
&\to 2l^2\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2} \\
&\to \frac{2l^2}{\sqrt{T}}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

Usando las ecs. (1.22) (1.8), tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\bar{\phi}_i} &= \frac{1}{2}k\left[-\frac{\partial}{\partial\bar{\phi}_i}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\bar{\phi}_{i+1}-\bar{\phi}_i\right)^2\right] \\
&\to l\sqrt{T}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) \qquad (1.23) \\
&= -l\sqrt{T}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)}\right]. \qquad (1.24)
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1.19) y (1.23), obtenemos la ecuación de movimiento para el campo $\phi(z,t)$:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0, \tag{1.25}$$

que corresponde a la ecuación de onda en una dimensión. En tres dimensiones obtendríamos:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi = 0. \tag{1.26}$$

De otro lado, de las ecuaciones (1.20) y (1.24), obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange para la densidad Lagrangiana

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)}\right] = 0. \tag{1.27}$$

En tres dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x)}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial y)}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)}\right] = 0. \tag{1.28}$$

Definiendo

$$x^\mu = (t,x,y,z) \qquad \mu = 0,1,2,3, \tag{1.29}$$

podemos expresar las ecuaciones de Euler-Lagrange que satisface $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu)$, como

$$\sum_\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)}\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)}\right] = 0,$$

donde, en la última ecuación se ha usado la convención de suma sobre índices repetidos.

Si la densidad Lagrangiana depende también directamente de ϕ, $\mathcal{L}(\partial\phi/\partial x^\mu, \phi)$, entonces la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas $\partial\phi/\partial x^\mu$ y ϕ, es

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x^\mu)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0. \tag{1.30}$$

Ésta última ecuación de deducirá usando métodos variacionales en la siguiente sección

1.3. Principio de Mínima Acción para $\mathcal{L}$

1.3.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Definamos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \tag{1.31}$$

En tres dimensiones, la acción de la ec. (1.13), queda

$$S[\phi,\partial_\mu\phi] = \int_R d^4x\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi) \tag{1.32}$$

donde $d^4x = dtdxdydz$. Considere primero una transformación sólo de los campos, tal que $(x = x^\mu)$

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \tag{1.33}$$

Con $\delta x = x' - x$, la expansión de Taylor para $f(x + \delta x)$ es

$$f(x + \delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \cdots \tag{1.34}$$

Para $\mathcal{L}$, tenemos de la ec. (1.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') &= \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi)) \\ &= \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) \end{aligned} \tag{1.35}$$

Entonces, de imponer que $\delta S = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \delta S = S' - S &= \int_R d^4x\, \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') - \int_R d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \\ &= \int_R d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right] \\ &= \int_R d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi + \int_R d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \\ \delta S &= \int_R d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi + \int_\sigma \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] d\sigma_\mu = 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Donde hemos aplicado el Teorema de Gauss generalizado. Como la variación de $\delta\phi$ es cero sobre la hipersuperficie σ resulta

$$\int_R d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi = 0. \tag{1.37}$$

Como $\delta\phi$ es cualquier posible variación entre las fronteras de la hipersuperficie, el integrando debe anularse y resultan las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0. \tag{1.38}$$

1.3.2. Teorema de Noether para simetrías internas

Para un campo complejo la ec. (1.32) se generaliza a

$$S[\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*] = \int_R d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*) \tag{1.39}$$

Usando el mismo procedimiento, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S = &\int_R d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\right\}\delta\phi + \int_R d^4x \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} - \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right]\right\}\delta\phi^* \\ &+ \int_R d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + \delta\phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right] = 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Usando de nuevo el Teorema de Gauss resultan las ecuaciones de Euler Lagrange para ϕ y ϕ^*

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0, \qquad \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = 0. \tag{1.41}$$

De otro lado, si asumimos que ϕ y ϕ^* satisfacen las ecuaciones de Euler–Lagrange, en lugar de asumir que $\delta\phi$ y $\delta\phi^*$ se anulan sobre la hipersuperficie, los dos primeros términos de la ec. (1.40) se anulan y tendremos que para que $\delta S = 0$:

$$\int_R d^4x\,(\partial_\mu J^\mu) = 0, \tag{1.42}$$

donde,

$$J^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi + \delta\phi^*\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right] \tag{1.43}$$

Entonces J^μ satisface la ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial J^0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{1.45}$$

Integrando con respecto al volumen

$$\int_V \frac{\partial J^0}{\partial t}\,d^3x + \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}\,d^3x = 0,$$

$$\int_V \frac{\partial J^0}{\partial t}\,d^3x + \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = 0, \tag{1.46}$$

Escogiendo una superficie suficientemente grande que abarque toda la fuente de densidad $\rho = J^0$, de la corriente $\mathbf{J}$, el segundo integrando es cero y

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,d^3x = 0. \tag{1.47}$$

Este resultado es conocido como Teorema de Noether. Éste establece que para toda transformación continua del tipo (1.33), debe existir una cantidad conservada, $dQ/dt = 0$, que en este caso corresponde a

$$Q = \int_V \rho\,d^3x. \tag{1.48}$$

1.3.3. Teorema de Noether para simetrías externas

Para el caso de una simetría externas, por ejemplo la correspondiente a una traslación espacio–temporal

$$\phi'(x') = \phi'(x+\delta a) \tag{1.49}$$

$$\approx \phi'(x) + \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x}\delta a \tag{1.50}$$

$$= [\phi(x)+\delta\phi(x)] + \frac{\partial}{\partial x}[\phi(x)+\delta\phi(x)]\delta a \tag{1.51}$$

$$\approx \phi(x)+\delta\phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\delta a, \tag{1.52}$$

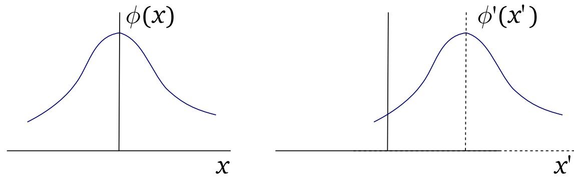

Figura 1.2: Traslación de función y coordenadas: $\phi(x) = \phi'(x')$

donde, por simplicidad, ϕ es de nuevo un campo real. Entonces,

$$\Delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\delta a. \tag{1.53}$$

Para una traslación, $\Delta\phi(x) = 0$, ver figura 1.2. De modo que

$$\delta\phi = (\partial_\mu\phi)\delta a^\mu. \tag{1.54}$$

Necesitamos el Jacobiano de la transformación

$$d^4x' = J\left(\frac{x'}{x}\right) d^4x = (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^4x \tag{1.55}$$

En este caso, asumiendo que el campo satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange y usando la ec. (1.54) tenemos

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_R d^4x'\, \mathcal{L}(\phi(x'), \partial_\mu\phi(x'), x') - \int_R d^4x\, \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x) \\
&= \int_R d^4x'\, \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu(\delta\phi), x + \delta a) - \int_R d^4x\, \mathcal{L} \\
&\approx \int_R d^4x\, \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi) + (\partial_\mu\mathcal{L})\delta a^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu\delta x^\mu\right] \\
&= \int_R d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] + \int_R d^4x\, [(\partial_\mu\mathcal{L})\delta a^\mu + \mathcal{L}\partial_\mu(\delta a^\mu)] \\
&= \int_R d^4x\, \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] + \int_R d^4x \partial_\mu(\mathcal{L}\delta a^\mu) \\
&= \int_R d^4x\, \partial_\mu \left[-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi)\delta a^\nu + \delta^\mu_\nu\mathcal{L}\delta a^\nu\right] \\
&= \int_R d^4x\, (\partial_\mu T^\mu_\nu)\, \delta a^\nu = 0.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Y por consiguiente

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0, \tag{1.57}$$

donde

$$T^\mu_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\phi) - \delta^\mu_\nu\mathcal{L} \tag{1.58}$$

El tensor T^{μ}_{ν} proviene de asumir la homogeneidad del espacio y el tiempo y es llamado el tensor de momentum–energía. La densidad Hamiltonina se obtiene de T^0_0

$$\mathcal{H} = T^0_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L} \tag{1.59}$$

$$= \pi(x)\frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{L}. \tag{1.60}$$

Comparando con la expresión correspondiente en la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica, tenemos que si $\phi(x)$ es la variable canónica, la variable canónica conjugada es $\pi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi(x)/\partial t)}. \tag{1.61}$$

El teorema de Noether en este caso establece que la invarianza de la Acción bajo traslaciones espacio–temporales da lugar a la conservación de la energía: ecuación de continuidad (1.57) para $\nu = 0$; y cada dirección del momentum: ecuación de continuidad para cada $\nu = i$ ($i = 1, 2, 3$).

Generalizando a un campo complejo

$$T^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L} \tag{1.62}$$

1.4. Aplicación a Mecánica Cuántica

Haciendo $\hbar = 1$, el Lagrangiano que da lugar a la ecuación de Schrödinger es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*) &= \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi - \frac{i}{2}\left(\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\psi\right) + \psi^* V \psi \\ &= \frac{1}{2m}\partial_i \psi^* \partial_i \psi - \frac{i}{2}\left(\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \psi\right) + \psi^* V \psi. \end{aligned} \tag{1.63}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.41) para la función de onda ψ^* obtenemos la ecuación de Scrödinger con $\hbar = 1$:

$$0 = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)}\right] + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*}. \tag{1.64}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} &= -\frac{i}{2}\psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^*)} &= \frac{i}{2}\psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi)} &= \frac{1}{2m}\partial_i \psi^* & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \psi^*)} &= \frac{1}{2m}\partial_i \psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= \frac{i}{2}\partial_0 \psi^* + \psi^* V & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= -\frac{i}{2}\partial_0 \psi^* + V\psi. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Entonces, reemplazando la ec. (1.65) en la ec. (1.64), tenemos

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^*)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} &= \partial_0 \left(\frac{i}{2}\psi\right) + \partial_i \left(\frac{1}{2m}\partial_i \psi\right) - \left(-\frac{i}{2}\partial_0 \psi + V\psi\right) \\ &= \frac{i}{2}\partial_0 \psi + \frac{1}{2m}\partial_i \partial_i \psi + \frac{i}{2}\partial_0 \psi - V\psi. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Que puede escribirse como

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi. \tag{1.67}$$

El Lagrangiano en ec (1.63), y por consiguiente la Acción, es invariante bajo una transformación de fase

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta}\psi. \tag{1.68}$$

Por consiguiente, de acuerdo al Teorema de Noether, debe existir una cantidad conservada. La corriente conservada se obtine de la ec. (1.43). Para los campos ψ y ψ^*, tenemos

$$\delta\psi = \psi' - \psi = (e^{i\theta} - 1)\psi \approx i\theta\psi \tag{1.69}$$

$$\delta\psi^* \approx -i\theta\psi. \tag{1.70}$$

Usando además la ec. (1.65) en la definición de J^0 dada por la ec. (1.43), tenemos

$$\begin{aligned} J^0 &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\right]\delta\psi + \delta\psi^*\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)}\right] \\ &= -\frac{i}{2}\psi^*(i\theta\psi) + (-i\theta\psi^*)\frac{i}{2}\psi \\ &= \theta\psi^*\psi, \end{aligned} \tag{1.71}$$

y

$$\begin{aligned} J^i &= \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi)}\right]\delta\psi + \delta\psi^*\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\psi^*)}\right] \\ &= \frac{1}{2m}\partial_i\psi^*(i\theta\psi) + (-i\theta\psi^*)\frac{1}{2m}\partial_i\psi \\ &= \frac{i\theta}{2m}\left(\partial_i\psi^*\psi - \psi^*\partial_i\psi\right). \end{aligned} \tag{1.72}$$

Entonces, normalizando apropiadamente la corriente escogiendo $\theta = 1$, tenemos

$$J^0 = \psi^*\psi \tag{1.73}$$

$$\mathbf{J} = \frac{i}{2m}\left(\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* - \psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right). \tag{1.74}$$

De acuerdo a la ec. (1.73), la cantidad conservada corresponde a la probabilidad de la función de onda y normalizando apropiadamente la ec. (1.48)

$$Q_\rho = \int_V \psi^*\psi\, d^3x = 1. \tag{1.75}$$

En cuanto a las simetrías externas, tenemos de la ec. (1.58) que

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}\partial_0\psi + \partial_0\psi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2}\psi^*\partial_0\psi + \frac{i}{2}\partial_0\psi^*\psi - \frac{1}{2m}\partial_i\psi^*\partial_i\psi + \frac{i}{2}\left(\psi^*\partial_0\psi - \partial_0\psi^*\psi\right) - \psi^*V\psi \\ &= -\frac{1}{2m}\partial_i\psi^*\partial_i\psi - \psi^*V\psi \end{aligned} \tag{1.76}$$

Como las corrientes solo están determinadas hasta un factor de proporcionalidad, definimos

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \equiv -T_0^0 &= \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\psi^* \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + \psi^* V\psi \\ &= \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi) - \frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + \psi^* V\psi. \end{aligned} \tag{1.77}$$

La corriente asociada a esta densidad, tal que

$$\begin{aligned}\partial^\mu T_\mu^0 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}T_0^0 + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}^0 &= 0\end{aligned} \tag{1.78}$$

se obtiene de la ec. (1.62). Usando además la ec. (1.65)

$$\begin{aligned}T_i^0 =& \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)}(\partial_i\psi) + (\partial_i\psi^*)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi^*)} \\ T_i^0 =& -\frac{i}{2}\psi^*(\partial_i\psi) + \frac{i}{2}(\partial_i\psi^*)\psi\end{aligned} \tag{1.79}$$

Entonces, definiendo

$$\mathbf{T}^0 = \frac{i}{2}\left(\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* - \psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi\right) \tag{1.80}$$

Además

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^0 &= \frac{i}{2}\left(\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* - \boldsymbol{\nabla}(\psi^*\psi) + \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) \\ &= i\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* - \frac{i}{2}\boldsymbol{\nabla}(\psi^*\psi)\end{aligned} \tag{1.81}$$

Integrando en el volumen

$$\int_V \mathbf{T}^0\, d^3x = i\int_V \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^* d^3x - \frac{i}{2}\boldsymbol{\nabla}\int_V \psi^*\psi\, d^3x \tag{1.82}$$

De acuerdo a la ec. (1.75), la última integral es una constante y

$$\begin{aligned}\int_V \mathbf{T}^0\, d^3x &= -i\int_V \psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi d^3x \\ \langle\widehat{\mathbf{p}}\rangle &= \int_V \psi^*\widehat{\mathbf{p}}\psi d^3x\end{aligned} \tag{1.83}$$

La ec. (1.77) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[-i\mathbf{T}^0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\psi^*\psi)\right] - \frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + \psi^* V\psi \\ &= -\frac{i}{2m}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}^0 + \frac{1}{4m}\nabla^2(\psi^*\psi) - \frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + \psi^* V\psi.\end{aligned} \tag{1.84}$$

Integrando sobre el volumen y usando la ec. (1.75)

$$\begin{aligned}\int_V \mathcal{H}\, d^3x &= -\frac{i}{2m}\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}^0\, d^3x + \frac{1}{4m}\nabla^2\int_V (\psi^*\psi)\, d^3x + \int_V \psi^*\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi\, d^3x \\ &= -\frac{i}{2m}\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}^0\, d^3x + \int_V \psi^*\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi\, d^3x \end{aligned}\tag{1.85}$$

Para un volumen suficientemente grande que incluya todas las fuentes de densidad $\mathcal{H}$, la integral del correspondiente flujo, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{T}^0$, es cero. Entonces

$$\begin{aligned}H \equiv \int_V \mathcal{H}\, d^3x &= \int_V \psi^*\left(-\frac{1}{2m}\nabla^2 + V\right)\psi\, d^3x \\ &= \int_V d^3x\, \psi^*\widehat{H}\psi = \langle\widehat{H}\rangle. \end{aligned}\tag{1.86}$$

Que es un resultado bien conocido de la mecánica cuántica.

Como

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \widehat{V},\tag{1.87}$$

y usando la ec. (1.67), podemos identificar

$$\widehat{H} = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = -i\,\boldsymbol{\nabla}.\tag{1.88}$$

Retornando a la ec. (1.83), tenemos que para la solución de partícula libre de la ecuación de Schrödinger

$$\psi = A\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}},\tag{1.89}$$

la condición de normalización en ec. (1.75) implica que $|A|^2 = 1/L^3$, y

$$\int_V \mathbf{T}^0\, d^3x = \mathbf{k}.\tag{1.90}$$

Nótese que de la ec. (1.86) se puede obtener la densidad Hamiltoniana, y usando la ec. (1.59) se puede encontrar la densidad Lagrangiana

1.5. Aplicación a la cuerda unidimensional

Para el Lagrangiano en la ec. (1.15), T_0^0 da lugar al Hamiltoniano para la cuerda unidimensional

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right], \end{aligned}\tag{1.91}$$

y

$$H = \int_0^L \mathcal{H}\, dz \tag{1.92}$$

De acuerdo al Teorema de Noether,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{1.93}$$

El flujo de energía esta dado por T_0^3

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial z)}(\partial\phi/\partial t) \\ &= -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.94}$$

Si proponemos como solución a la ecuación de onda (1.25)

$$\phi(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{v^2}{2\omega_n L}\right)^{1/2} \left[a_n\, e^{i(k_n z - \omega_n t)} + a_n^*\, e^{-i(k_n z - \omega_n t)}\right], \tag{1.95}$$

Para que se satisfagan las condiciones periódicas $\phi(0,t) = \phi(L,t)$

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_n t} &= e^{i(k_n L - \omega_n t)} \\ e^{ik_n L} &= 1 \end{aligned} \tag{1.96}$$

y

$$k_n = \frac{2\pi n}{L} \tag{1.97}$$

De la ecuación de onda, para cada n

$$\begin{aligned} &\frac{-i\omega_n}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{v^2}{2\omega_n L}\right)^{1/2}\left[a_n\, e^{i(k_n z-\omega_n t)} - a_n^*\, e^{-i(k_n z-\omega_n t)}\right]\right\} \\ &- ik_n\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left(\frac{v^2}{2\omega_n L}\right)^{1/2}\left[a_n\, e^{i(k_n z-\omega_n t)} - a_n^*\, e^{-i(k_n z-\omega_n t)}\right]\right\} = 0 \\ &- \frac{\omega_n^2}{v^2}\phi + k_n^2\phi = 0 \end{aligned} \tag{1.98}$$

entonces, se debe satisfacer que

$$\omega_n^2 = v^2 k_n^2. \tag{1.99}$$

k_n y ω_n satisfacen

$$k_n = -k_n, \qquad \omega_n = \omega_n. \tag{1.100}$$

Definiendo

$$\phi_n(z,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(k_n z - \omega_n t)}, \tag{1.101}$$

La ecuación (1.95) queda

$$\phi(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{v^2}{2\omega_n}\right)^{1/2}\left[a_n\,\phi_n(z,t) + a_n^*\,\phi_n^*(z,t)\right], \tag{1.102}$$

y las funciones ϕ_n satisfacen las siguientes condiciones de normalización

$$\int_0^L dz\, \phi_n^*(z,t)\phi_m(z,t) = \delta_{nm}. \tag{1.103}$$

Además

$$\int_0^L dz\, \phi_n(z,t)\phi_m(z,t) = \delta_{n,-m}e^{-2i\omega_n t}. \tag{1.104}$$

En tal caso de la ec. (1.92), tenemos

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2v^2}\int_0^L dz\, \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\int_0^L dz\, \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n\, a_n^* a_n \end{aligned} \tag{1.105}$$

En unidades naturales donde $\hbar = 1$, $E = \hbar\omega = \omega$, y la frecuencia ω tiene unidades de energía. Además

$$P_z = \int_0^L \mathcal{P}_z\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n\, a_n^* a_n \tag{1.106}$$

De nuevo el número de onda representa el vector de flujo de energía.

En una teoría cuántica de campos, el campo ϕ pasa a ser un operador $\hat{\phi}$. Esto puede hacerse de dos maneras. Por el método de cuantización canónica, usando la variable canónica conjuga $\pi(z,t)$ definida en la ec. (1.61), que para el caso de la cuerda unidimensional corresponde a

$$\pi(z,t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{1.107}$$

Entonces los correspondientes operadores para ϕ y π deben satisfacer ($\hbar = 1$)

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(z,t), \hat{\pi}(z',t)] &= i\delta(z'-z) \\ [\hat{\phi}(z,t), \hat{\phi}(z',t)] &= 0 \\ [\hat{\pi}(z,t), \hat{\pi}(z',t)] &= 0 \end{aligned} \tag{1.108}$$

En este caso $\hat{\phi}$, puede expandirse en términos de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(z,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{v^2}{2\omega_n L}\right)^{1/2} \left[\hat{a}_n\, e^{i(k_n z - \omega_n t)} + \hat{a}_n^\dagger\, e^{i(k_n z - \omega_n t)}\right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_n \end{aligned} \tag{1.109}$$

y $\hat{\phi}$ y $\hat{\pi}$ satisfacen las relaciones de conmutación (1.108) si

$$\begin{aligned} [\hat{a}_n, \hat{a}_n^\dagger] &= 1 \\ [\hat{a}_n, \hat{a}_n] &= 0 \\ [\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] &= 0. \end{aligned} \tag{1.110}$$

El Hamiltoniano es ahora un operador dado por

$$\widehat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n \widehat{N}_n, \tag{1.111}$$

Con el operador de número $\widehat{N}_n$, dado por

$$\widehat{N}_n = \hat{a}_n^\dagger a_n. \tag{1.112}$$

Ya que $\widehat{N}_n$ es Hermítico, *cada* $\widehat{N}_n$ este tiene un conjunto completo de autoestados ortonormales [7]

$$\begin{aligned} \widehat{N}_n|m\rangle &= m|m\rangle \\ \langle m'|m\rangle &= \delta_{m'm} \\ \mathbf{1} &= \sum_m |m\rangle\langle m|. \end{aligned} \tag{1.113}$$

Utilizando las relaciones de conmutación de $\widehat{N}_n$ con a_n y $\hat{a}_n^\dagger$ se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \hat{a}_n^\dagger|m\rangle &= \sqrt{m+1}\,|m+1\rangle \\ \hat{a}_n|m\rangle &= \sqrt{m}\,|m-1\rangle. \end{aligned} \tag{1.114}$$

y por consiguiente

$$\widehat{N}_n|m\rangle = m|m\rangle \tag{1.115}$$

Esto significa que todos los estados se pueden generar desde un estado base $|0\rangle$

$$|m\rangle = \frac{\left(\hat{a}_n^\dagger\right)^m}{\sqrt{m!}}|0\rangle. \tag{1.116}$$

A los estados $|m\rangle$ se les llama estados de fonones. m corresponde al número de fonones de energía ω_n. $\hat{a}_n^\dagger$ crea un fonón de energía ω_n, y a_n destruye un fonón de frecuencia ω_n. Al estado $|0\rangle$ se le llama el vacío.

Para dos operadores de número de frecuencias diferentes ω_{n_1} y ω_{n_2} tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{n_1}|m_{n_1}\rangle &= m_{n_1}|m_{n_1}\rangle & \qquad \widehat{N}_{n_2}|m_{n_2}\rangle &= m_{n_2}|m_{n_1}\rangle \\ \widehat{N}_{n_1}|m_{n_2}\rangle &= 0 & \qquad \widehat{N}_{n_2}|m_{n_1}\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{1.117}$$

De este modo

$$\widehat{H}|m_{n_1}\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \widehat{N}_n|m_{n_1}\rangle = \omega_{n_1} m_{n_1}|m_{n_1}\rangle. \tag{1.118}$$

El autoestado del Hamiltoniano para I conjuntos de fonones de diferentes frecuencias puede escribirse como

$$|m_{n_1}, m_{n_2}, \ldots, m_{n_I}\rangle. \tag{1.119}$$

A tales estados, con un número definido de fonones de varias frecuencias, se les llama estados de *Fock*.

Los autovalores del Hamiltoniano para un estado de Fock son

$$\widehat{H}|m_{n_1}, m_{n_2}, \ldots, m_{n_I}\rangle = \sum_{i=1}^{I} \omega_{n_i} m_{n_i} |m_{n_1}, m_{n_2}, \ldots, m_{n_i}\rangle, \tag{1.120}$$

de modo que la energía de un estado de Fock es

$$E = \langle m_{n_1}, m_{n_2}, \ldots, m_{n_I}|\widehat{H}|m_{n_1}, m_{n_2}, \ldots, m_{n_I}\rangle = \sum_{i=1}^{I} \omega_{n_i} m_{n_i}. \tag{1.121}$$

Los fonones están asociados a frecuencias, o modos normales de la cuerda, de modo que están relacionados al movimiento de la cuerda como un todo, mientras que las partículas de la cuerda están localizadas en el espacio de posiciones. En general pueden existir partículas asociadas a campos abstractos que no tienen conexión con ningún sistema mecánico.

Finalmente, si el número de cuantos de una determinada frecuencia ω_{n_1} se puede conocer sin ninguna incertidumbre entonces el campo $\phi_{n_1}(z,t) = \langle n_1|\hat{\phi}_{n_1}(z,t)|n_1\rangle$ es completamente incierto. Entre mayor sea la incertidumbre en el número de fonones de una determinada frecuencia con mayor precisión se podrá determinar el campo clásico asociado a esa frecuencia [7].

Retornando a la ec. (1.118) podemos ver que $\hat{\phi}_{n_1}$ puede interpretarse como una partícula que transporta una energía ($\hbar = 1$)

$$\langle m_{n_1}|\hat{H}|m_{n_1}\rangle = \omega_{n_1} m_{n_1} \tag{1.122}$$

Para una interpretación completa de partícula se debe mostrar que el campo cuantizado también transporta momentum. De hecho

$$\langle m_{n_1}|\hat{P}_z|m_{n_1}\rangle = k_{n_1} m_{n_1} \tag{1.123}$$

La interpretación del número de onda de un campo cuántico como momentum es más simple en el contexto de la relatividad especial. La ec. (1.99), puede interpretarse como la ecuación energía momentum de la relatividad especial ($c = 1$)

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2, \tag{1.124}$$

si $m = 0$ y $v = c$, es decir, para ondas propagandose relativísticamente

$$\omega_{n_1}^2 = k_{n_1}^2 \tag{1.125}$$

El momentum de la partícula coincide con el correspondiente número de onda

Entonces, la interpretación del campo $\hat{\phi}$ como partícula, es más directa en un contexto donde se combine la relatividad especial con la cuantización del campo mismo. Obviando estos detalles, en adelante llamaremos partícula al campo clásico.

Si modificamos el Lagrangiano en ec. (1.15), para incluir un término adicional ($v = c = 1$)

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 - m^2\phi^2\right]. \tag{1.126}$$

entonces, la ec. (1.109) es solución a la ecuación resultante de aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + m^2 = 0, \tag{1.127}$$

si

$$\omega^2 = k^2 + m^2. \tag{1.128}$$

De este modo m puede interpretarse como la masa de la partícula.

Generalizando a 3 dimensiones tenemos el Lagrangiano de Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2, \tag{1.129}$$

que dan lugar a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0. \tag{1.130}$$