Capítulo 3

Principio Gauge Local

3.1. Ecuación de klein-Gordon

De la componente escalar de la ecuación de Proca, (2.106), obtenemos la ecuación de Klein–Gordon para un campo escalar real $\phi = A^0$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \rho\phi \tag{3.1}$$

Donde ρ es la densidad de carga que actua como fuente del campo ϕ.

Posteriormente discutiremos en detalles porque m corresponde a la masa de la partícula. La idea básica es que ϕ tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencias $V = (1/2)m^2\phi^2$ que corresponde a la energía de un oscilador armónico. Esta energía es equivalente a masa. Note que $m^2 < 0$ no puede interpretarse como masa. En este caso ϕ describirá excitaciones alrededor de la parte plana del potencial. Como estas excitaciones no cuestan energía, corresponde a una partícula sin masa.

El campo ϕ puede pensarse como proveniente de una fuente de la misma manera como el campo electromagnético surge de partículas cargadas. Como en el caso del electromagnetismo, es esta sección podemos considerar los campos sin preocuparnos de las fuentes. En tal caso tendremos una teoría en la cual el campo escalar juega el papel de partícula mediadora de la interacción.

Si el campo escalar se generaliza para que pueda tener otros números cuánticos, como carga eléctrica, entonces estos pueden ser las fuentes de las respectivas cargas y corrientes en la ecuaciones para campos vectoriales. Esto se estudiará en la sección 3.2. En tal caso podríamos tener por ejemplo “átomos” formados de partículas escalares que se excitan emitiendo fotones.

En las secciones 2.2.2 y 2.4, hemos visto que el Lagrangiano en ec. (3.1) da lugar a las ecuaciones de Klein-Gordon en presencia de una densidad de carga

$$(\Box + m^2)\phi = \rho \tag{3.2}$$

De acuerdo a la ec. (2.107), tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \rho\phi\end{aligned} \tag{3.3}$$

En analogía con el electromagnetismo donde las densidades de carga y corrientes son la fuente del campo A^μ, podemos pensar en ρ como la fuente del campo ϕ. En el caso del electromagnetismo el análisis de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, ec. (2.73), para las componentes A^0 y J^0, en el gauge de Coulomb:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0, \tag{3.4}$$

da lugar a la Ley de Coulomb, que corresponde a una interacción de rango infinito [10]. Veremos a continuación que un análisis similar para un campo escalar masivo (o para la componente cero de un campo vectorial masivo) da lugar a una interacción de corto rango.

Consideremos el caso más simple de una fuente puntual para el campo ϕ:

$$\rho(x)=g\delta(\mathbf{x}) \tag{3.5}$$

donde g es una constante. Entonces ρ es independiente del tiempo y genera un campo (un potencial) independiente del tiempo. Entonces, como:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}=0,$$

tenemos

$$(-\nabla^2+m^2)\phi(\mathbf{x})=g\delta(\mathbf{x}) \tag{3.6}$$

Para resolver la ecuación diferencial es más conveniente transformar $\phi(\mathbf{x})$ al espacio de momentos. Su transformada de Fourier es

$$\phi(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\tilde{\phi}(\mathbf{k}). \tag{3.7}$$

La transformada inversa es

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3x\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\tilde{\phi}(\mathbf{x}). \tag{3.8}$$

Ademas tenemos la propiedad

$$\delta(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3.9}$$

Reemplazando ec. (3.7) en (3.6), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k(\mathbf{k}^2+m^2)\tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= g\delta(\mathbf{x})\\ &=\frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\\ (\mathbf{k}^2+m^2)\tilde{\phi}(\mathbf{k}) &=\frac{g}{(2\pi)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k})=\frac{g}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\mathbf{k}^2+m^2}. \tag{3.10}$$

Reemplazando en la ec. (3.7) y definiendo $r\equiv|\mathbf{x}|$

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) =&\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3k\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\left[\frac{g}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\mathbf{k}^2+m^2}\right]\\ =&\frac{g}{(2\pi)^3}\int d^3k\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2+m^2}\\ =&\frac{g}{(2\pi)^3}2\pi\int_0^\infty d|\mathbf{k}|\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2+m^2}\int_0^\pi e^{i|\mathbf{k}|r\cos\theta}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta\, d\theta$,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) =& -\frac{g}{(2\pi)^2}\int_0^\infty d|\mathbf{k}|\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2+m^2}\int_1^{-1} e^{i|\mathbf{k}|ru}du,\\ \phi(\mathbf{x}) =& \frac{g}{(2\pi)^2}\int_0^\infty d|\mathbf{k}|\frac{\mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2+m^2}\int_{-1}^{1} e^{i|\mathbf{k}|ru}du.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ya que

$$\int_{-1}^{1} e^{i|\mathbf{k}|ru}du = \frac{e^{i|\mathbf{k}|r}-e^{-i|\mathbf{k}|r}}{i|\mathbf{k}|r}$$

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) =& \frac{g}{i(2\pi)^2 r}\int_0^\infty d|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\frac{e^{i|\mathbf{k}|r}-e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2+m^2}\\ =& \frac{g}{i(2\pi)^2 r}\left(\int_0^\infty d|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2+m^2} - \int_0^\infty d|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\frac{e^{-i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2+m^2}\right)\\ =& \frac{g}{i(2\pi)^2 r}\left(\int_0^\infty d|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2+m^2} - \underbrace{\int_0^{-\infty} d|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2+m^2}}_{|\mathbf{k}|\to-|\mathbf{k}|}\right)\\ =& \frac{g}{i(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\frac{e^{i|\mathbf{k}|r}}{\mathbf{k}^2+m^2}\\ =& \frac{g}{i(2\pi)^2 r}\int_{-\infty}^\infty d|\mathbf{k}|\frac{|\mathbf{k}|e^{i|\mathbf{k}|r}}{(|\mathbf{k}|+im)(|\mathbf{k}|-im)}\end{aligned} \tag{3.12}$$

Definiendo

$$f(z) = \frac{ze^{izr}}{z+im}$$

y usando la integral de Cauchy para el contorno correspondiente al semiplano positivo que incluye el polo en $z = im$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-im}dz = 2\pi i f(im) = 2\pi i\frac{im\, e^{-mr}}{2im} = \pi i\, e^{-mr} \tag{3.13}$$

tenemos que

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r} \tag{3.14}$$

A la luz de la interacción fuerte, un protón y un neutrón son indistinguibles y son llamados nucleones. En primera aproximación la interacción fuerte puede ser tratada como una interacción de Yukawa en el rango de los fermis entre los nucleones, mediada por mesones, como el pión. Ver sec. 2.2 de [20].

Para ver esto considere un nucleón como fuente de un mesón intermediario. De acuerdo a la ec. (3.14),

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{4\pi}\frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^3x' g\,\delta(\mathbf{x}')\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \rho(\mathbf{x}')\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\partial\mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial\phi/\partial t)}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= -\mathcal{L}_{\text{int}} \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{4\pi}\int d^3x\, d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')\frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{3.18}$$

El Hamiltoniano de interacción en ec. (3.18) representa la interacción entre dos nucleones mediante el intercambio de un mesón. En forma análoga a como dos electrones intercambian un fotón mediante la interacción electromagnética. En el caso de $m = 0$, H_{int}, corresponde a la de energía potencial de Coulomb. El potencial por unidad de carga al cuadrado, puede escribirse como

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-mr}}{r} \tag{3.19}$$

El potencial en (3.19) recibe el nombre de *potencial de Yukawa* y corresponde a una interacción de rango $r \sim 1/m$.

En el caso general tenemos que $\phi(x)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon en el espacio libre, ec. (3.2)

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2)\phi = 0 \tag{3.20}$$

con solución,

$$\phi \propto \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t) \tag{3.21}$$

que, consistente con la discusión en la sección 2.2, ec.(2.51), da lugar a la condición

$$m^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2. \tag{3.22}$$

De este modo m, puede interpretarse como la masa de la partícula ϕ. El rango de la interacción entre nucleones es de $r \sim 2\,\text{fm}$. Ver más detalles en [20]. La siguiente discusión está basada en esa referencia. Yukawa entonces predijo que la masa del mesón debía ser del orden de

$$m \sim \frac{1}{r} = \frac{1}{2\times 10^{-15}\text{m}} \times \frac{1\text{m}}{1/(1.97\times 10^{-16}\,\text{GeV}^{-1})} \sim 100\,\text{MeV}. \tag{3.23}$$

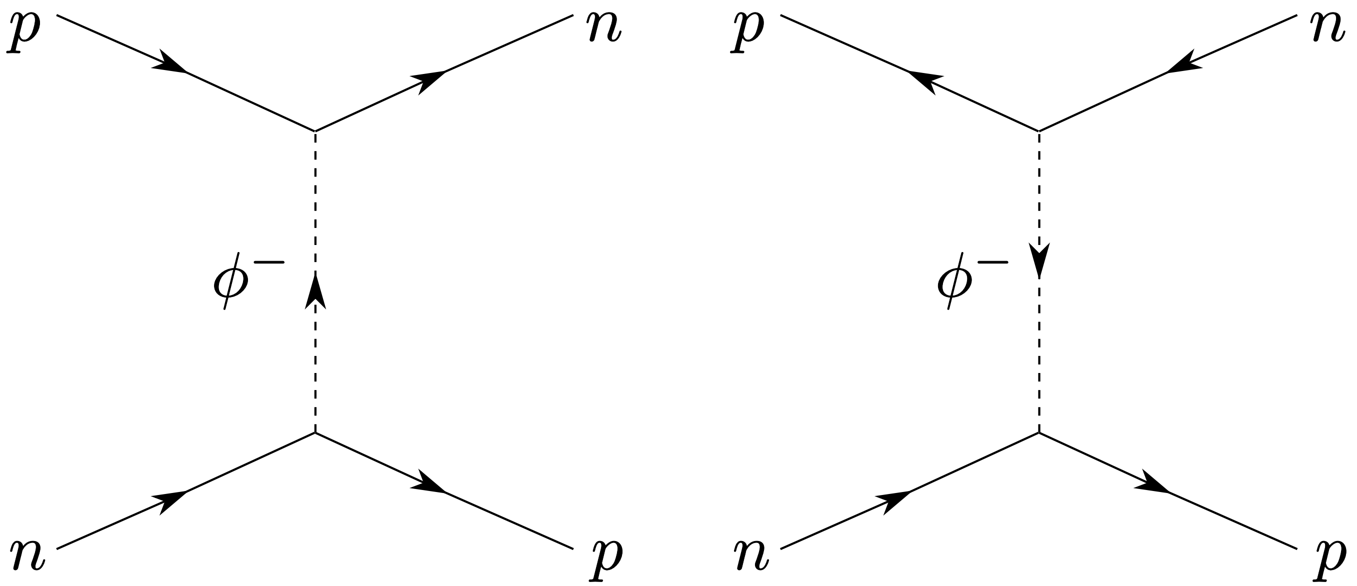

Figura 3.1: Intercambio de Yukawa de un sólo ϕ

A continuación Yukawa considero la posibilidad de que el quantum ϕ pudiera ser emitido en la transición $n \to p$, a través del proceso

$$n \to p + \phi^- \tag{3.24}$$

donde la conservación de la carga determina la carga de ϕ^-. Sin embargo el proceso viola la conservación de la energía ya que $m_n = 939.565\,56(81)\,\mathrm{MeV}$, $m_p = 938.272\,013(23)\,\mathrm{MeV}$, de modo que $m_n < m_p + m_\phi$, si $m_\phi \sim 100\,\mathrm{MeV}$, así esto no puede ocurrir como un proceso real de emissión. Sin embargo, Yukawa notó que si (3.24) se combina con el proceso inverso

$$p + \phi^- \to n \tag{3.25}$$

entonces una interacción n–p podría tomar lugar a través del mecanismo mostrado en la figura 3.1(a). Es decir a través del intercambio de un quantum ϕ^-. El otro diagrama compatible con la conservación de la carga también aparece en la figura

La relación de incertidumbre

$$\Delta E\,\Delta t \geq 1/2 \tag{3.26}$$

aplicada a la teoría de Yukawa [20], brinda un nuevo entendimiento de la relación entre el rango y la masa en ec. (3.23). Δt es el tiempo que el aparato para medir la energía del sistema cuántico interactúa con el aparato de medida y $\Delta E = 1/(2\Delta t)$ es el error mínimo que se obtiene en la medida de la energía, tal que $E = E_0 \pm \Delta E$. Para que la incertidumbre en la medida de energía sea suficiente para materializarse en $\phi^\pm$

$$m \sim \frac{1}{2\Delta t} \tag{3.27}$$

como t es el tiempo que tarda en ir ϕ^- de n a p, el aparato debe operar a una escala de tiempos menores que t para poder detectar la partícula

$$\Delta t \sim r/a \qquad a > 1, \tag{3.28}$$

donde r es la separación entre los nucleones. Entonces

$$m \sim \frac{a}{2r}. \tag{3.29}$$

Para $r \sim 2\,\mathrm{fm}$ y $m = 100\,\mathrm{GeV}$, $a > 2$. Así, si el aparato de medida opera a una escala de tiempo del orden de la mitad de t, la incertidumbre resultante en la energía es suficiente para que se produzca el $\phi^{\pm}$. Note que a medida que $r \to \infty$, la masa de la partícula que se intercambia debe ser cero, como ocurre en el caso electromagnético. El tiempo que tarda en cruzar $\phi^{\pm}$ en la figura 3.1 es

$$\Delta t > \Delta r \tag{3.30}$$

donde Δr es la distancia que separa los nucleones. Así

$$\Delta E \geq \frac{1}{2\Delta t} \sim \frac{1}{\Delta r} \tag{3.31}$$

Por ejemplo, para una masa de 1 GeV el rango es de fermis. (1 fermi=1 fm). Entonces, si la partícula que media la interacción es masiva, la correspondiente interacción es de corto rango.

En el espacio de momentos, la cantidad relevante que representa el intercambio de piones, es la que aparece en la ec. (3.12) y se conoce como el *propagador*:

$$\text{propagador:} \qquad \frac{1}{\mathbf{k}^2 - m^2} \tag{3.32}$$

En el caso electromagnético tendremos simplemente

$$1/\mathbf{k}^2. \tag{3.33}$$

Para partículas α incidiendo sobre un metal y siendo dispersadas por un ángulo θ entre $\mathbf{q}$ y $\mathbf{q}'$, tal que se satisface la condición de dispersión elástica $\mathbf{q}^2 = \mathbf{q}'^2$ (dispersión de Rutherford)

$$\mathbf{k}^2 = (\mathbf{q} - \mathbf{q}')^2 = 2\mathbf{q}^2(1 - \cos\theta) = 4\mathbf{q}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{3.34}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{cross section} &\propto \frac{1}{\mathbf{k}^2} \\ &\propto \sin^{-4} \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

que explica la famosa variación angular de la dispersión de Rutherford, en la cual las partículas α son dispersadas por los núcleos positivamente cargados del metal. Ver figura 3.2

En general tendremos

$$\text{propagador:} \qquad \frac{1}{k^2 - m^2}, \tag{3.36}$$

donde $k = (k_0, \mathbf{k})$

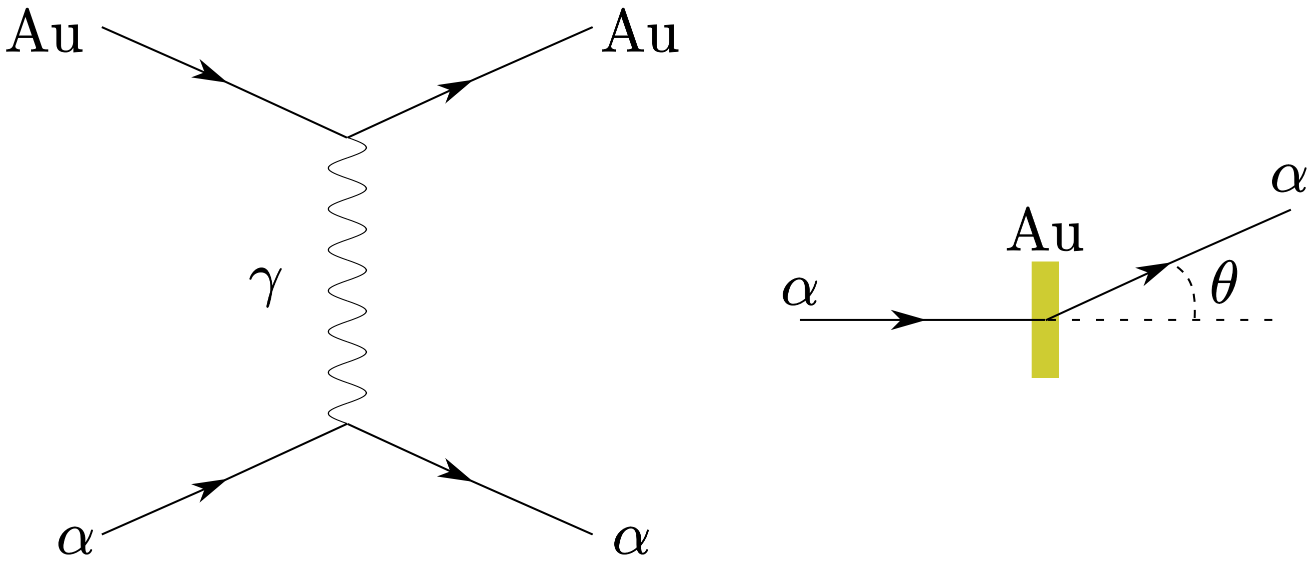

Figura 3.2: Dispersión de partículas α a través de una lámina de oro

3.2. Campos escalares complejos

Algunas consecuencias físicas interesantes surgen si consideramos un sistema de dos campos escalares reales, ϕ_1 y ϕ_2, que tengan la misma masa m. Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\partial^\mu \phi_1 \partial_\mu \phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2] + \frac{1}{2}[\partial^\mu \phi_2 \partial_\mu \phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2] \tag{3.37}$$

Si definimos

$$\begin{align}
\phi =& \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \qquad \text{then} \tag{3.38}\\
\phi^* =& \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \qquad \text{and} \tag{3.39}\\
\sqrt{2}\phi =& (\phi_1 + i\phi_2) \nonumber\\
\sqrt{2}\phi^* =& (\phi_1 - i\phi_2). \qquad \text{Therefore} \nonumber\\
\sqrt{2}(\phi + \phi^*) =& 2\phi_1 \nonumber\\
\sqrt{2}(\phi - \phi^*) =& 2i\phi_2. \qquad \text{Then} \nonumber\\
\phi_1 =& \frac{\phi + \phi^*}{\sqrt{2}} \tag{3.40}\\
\phi_2 =& \frac{\phi - \phi^*}{\sqrt{2}}. \tag{3.41}
\end{align}$$

Reemplazando la ecuaciones (3.40) y (3.41) en la ec. (3.37), tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =&\frac{1}{4}[\partial^\mu(\phi+\phi^*)\partial_\mu(\phi+\phi^*)-\frac{1}{2}m^2(\phi+\phi^*)^2]\\
&+i^2\frac{1}{4}[\partial^\mu(\phi-\phi^*)\partial_\mu(\phi-\phi^*)-\frac{1}{2}m^2(\phi-\phi^*)^2]\\
=&\frac{1}{4}[\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi+\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi^*+2\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi-m^2(\phi^2+\phi^{*2})+2\phi^*\phi]\\
&-\frac{1}{4}[\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi+\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi^*-2\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi-m^2(\phi^2+\phi^{*2})-2\phi^*\phi]\\
=&\frac{1}{4}[4\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi-4m^2\phi^*\phi]\\
\mathcal{L} =&\partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi-m^2\phi^*\phi
\end{aligned}\tag{3.42}$$

De la ec. (1.41) de la sección 1.3,

De las ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ^*, usando el Lagrangiano en ec. (3.42)

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}=0\\
\partial_\mu\partial^\mu\phi+m^2\phi=0\\
(\Box+m^2)\phi=0,
\end{aligned}\tag{3.43}$$

y de la ecuaciones de Euler-Lagrange para ϕ,

$$(\Box+m^2)\phi^*=0.\tag{3.44}$$

De este modo tanto ϕ, como ϕ^*, satisfacen la ecuación de Klein-Gordon.

Estamos ahora interesado en las simetrías internas del Lagrangiano. Entonces la corriente conservada puede definida en la sección 1.3, eq. (1.43)

$$\begin{aligned}
J^\mu =&\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi+\delta\phi^*\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\\
J^\mu =&\partial^\mu\phi^*\delta\phi+\delta\phi^*\partial^\mu\phi.
\end{aligned}\tag{3.45}$$

Además de la invarianza de Lorentz, el Lagrangiano en ec, (3.42) también es invariante bajo el grupo de transformaciones U(1) definido en las sección 2.3.1, pero con una fase constante

$$U=e^{i\theta}\approx 1+i\theta.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\phi\xrightarrow{U}\phi'=e^{i\theta}\phi\approx(1+i\theta)\phi\\
=\phi+i\theta\phi.
\end{aligned}\tag{3.46}$$

Entonces,

$$\delta\phi=i\theta\phi\tag{3.47}$$
$$\delta\phi^*=-i\theta\phi^*.\tag{3.48}$$

Reemplazando en ec. (3.45)

$$J^\mu \propto -i\theta(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi), \tag{3.49}$$

y

$$\rho = J^0 \propto -i\theta(\phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t}). \tag{3.50}$$

Definimos J^μ como

$$J^\mu = i(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*), \tag{3.51}$$

Como ρ puede ser negativo no puede interpretarse como una probalidad, como se hizo con la función de onda de la ecuación de Scrödinger. Esto presentó un obstaculo en la interpretación inicial de la ecuación de Klein-Gordon. Sin embargo una vez se cuantiza el campo escalar la probabilidad de los estados cuánticos queda bien definida [10].

Para interpretar a que corresponde la densidad de la ecuación de Klein-Gordon para un campo escalar complejo considere la siguiente solución a la ec. (3.43)

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}}\left[a\, e^{ik\cdot x} + b^* e^{-ik\cdot x}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}}\left[a\, e^{i(wt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + b^* e^{-i(wt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right]\end{aligned} \tag{3.52}$$

Donde el factor global es una generalización de la ec. (1.95) para el caso en 3 dimensiones. Sea

$$\bar{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}}\left[a\, e^{i(wt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} - b^* e^{-i(wt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\right] \tag{3.53}$$

Usando la expresión para T^μ_ν se obtiene para el campo complejo

$$\begin{aligned}H &= \omega(a^*a + b^*b)\\ \mathbf{P} &= \mathbf{k}((a^*a + b^*b))\end{aligned} \tag{3.54}$$

Reemplazando en la ecuación (3.43)

$$\begin{aligned}iw\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial t} + i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{\phi} + m^2\phi &= 0\\ (-w^2 + \mathbf{k}^2 + m^2)\phi &= 0\\ (w^2 - \mathbf{k}^2 - m^2)\phi &= 0.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Como era de esperarse, para que la ec. (3.52) sea solución a la ecuación de Klein-Gordon, w y $\mathbf{k}$ deben satisfacer la ecuación de energía-momentum de la relatividad especial.

La ec. (3.53) también puede escribirse como

$$\phi = a\,\phi^+ + b^*\phi^- \tag{3.56}$$

donde,

$$\phi^- = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}}e^{i(wt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3.57}$$

$$\phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega L^3}}\, e^{-i(wt-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \tag{3.58}$$

son las soluciones de energía negativa y positiva respectivamente, a la ecuación de Klein-Gordon, si ω es una cantidad definido positiva. Entonces, si $\theta > 0$

$$\begin{aligned} J^0_+ &= i(\phi^{+*}\frac{\partial \phi^+}{\partial t} - \phi^+\frac{\partial \phi^{+*}}{\partial t}) \\ &= \frac{i}{2\omega L^3}[(-iw) - (iw)] \\ &= \frac{1}{L^3} > 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

$$J^0_- = -\frac{1}{L^3} < 0. \tag{3.60}$$

Entonces, la carga conservada es

$$Q^{\pm} = \int_V d^3x \, J^0_{\pm} = \pm 1 \tag{3.61}$$

Además de la expresión para la energía del campo en eq. (1.62), y usando la ec. (3.45).

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}(\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi^* \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^* \partial^\mu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} T^0_0 &= 2\partial^0 \phi \partial_0 \phi^* - \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + m^2 \phi^* \phi \\ &= \partial^0 \phi \partial_0 \phi^* - \partial^i \phi^* \partial_i \phi + m^2 \phi^* \phi \\ &= \partial^0 \phi \partial_0 \phi^* + \boldsymbol{\nabla} \phi^* \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$T^i_0 = \partial^i \phi^* \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \partial^i \phi \tag{3.64}$$

Para ϕ^+ (o $\phi-$)

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \frac{1}{2\omega L^3}\left[(-i\omega)(i\omega) + (i\mathbf{k})\cdot(-i\mathbf{k}) + m^2\right] \\ &= \frac{1}{2\omega L^3}\left[\omega^2 + \mathbf{k}^2 + m^2\right] \\ &= \frac{1}{2\omega L^3}\left[\omega^2 + \omega^2\right] \\ &= \frac{\omega}{L^3} \end{aligned} \tag{3.65}$$

y

$$E^{\pm} = \int_V d^3x \, T^0_0 = \omega > 0 \tag{3.66}$$

Para $\phi^{\pm}$

$$\begin{aligned} T^i_0 &= \frac{1}{2\omega L^3}\left[(\mp i k_i)(\mp i\omega) + (\pm i\omega)(\pm i k_i)\right] \\ &= -\frac{k_i}{L^3} \end{aligned} \tag{3.67}$$

y

$$\mathbf{P} = \int_V d^3x\, T_0^i = -\mathbf{k} \tag{3.68}$$

Además

$$\partial_\mu T_0^\mu = 0 \tag{3.69}$$

Por consiguiente podemos interpretar ϕ^+ como un campo representando a una partícula de carga positiva (campo de frecuencia negativa) y a ϕ^- como un campo representando a una partícula de carga negativa (campo de frecuencia positiva). La cantidad conservada debido a la invarianza de fase corresponde a la carga eléctrica.

Un campo escalar real tendría carga cero de acuerdo a la ec (3.50).

Si los campos escalares representan piones el campo escalar real puede representar a un π^0, mientras que el campo escalar complejo junto con su conjugado representarían al π^+ y al π^-. Tenemos dos casos interesantes

1. Para distancias suficientemente grandes entre piones cargados, las interacciones nucleares serían despreciables y solo interactuan electromagnéticamente a través del intercambio de fotones. En este caso los piones cargados serían la fuente de la corriente electromagnética dada en la ec. (3.51). El análisis de este caso dará lugar a una Teoría Gauge Local Abelina, representada por el grupo U(1).

2. A nivel de las interacciones nucleares, los tres piones serían indistinguibles y formarian un triplete de isospin fuerte que media la interacción, mientras que el neutrón y el protón formarían un doblete y serían la fuente de los piones. Esto complementa el modelo de Yukawa presentado en la sección 3.1 que requería la existencia de tres piones para mediar la interacción, el $\pi^\pm$ y π^0. El análisis de este caso dará lugar a una Teoría Gauge Local No Abelina, representada por el grupo SU(2) y que conserva la carga de isospín fuerte localmente.

3.3. Invarianza gauge local abeliana

Considere la representación del Grupo U(1), que de acuerdo a la sección 2.3.1 es

$$U(x) = e^{i\theta(x)} \tag{3.70}$$

En el Lagrangiano en ec. (3.42)

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi)^*\,\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \tag{3.71}$$

el término de masa es invariante bajo la transformación

$$\begin{aligned}\phi &\xrightarrow{U} \phi' = U\phi\\ \phi^* &\xrightarrow{U} \phi^{*\prime} = \phi U^{-1},\end{aligned} \tag{3.72}$$

pero el término cinético no lo es. Sin embargo, si cambiamos ∂_μ, por una derivada covariante $\mathcal{D}_\mu$, tal que la derivada covariante del campo transforme como el campo:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^\mu\phi &\xrightarrow{U} (\mathcal{D}^\mu\phi)' = U\,(\mathcal{D}^\mu\phi)\\ (\mathcal{D}^\mu\phi)^* &\xrightarrow{U} (\mathcal{D}^\mu\phi)^{*\,\prime} = (\mathcal{D}^\mu\phi)^*\,U^{-1},\end{aligned} \tag{3.73}$$

entonces el Lagrangiano obtenido por reemplazo $\partial^\mu \to \mathcal{D}^\mu$:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\phi)^* \mathcal{D}^\mu\phi - m^2\phi^*\phi, \tag{3.74}$$

es invariante bajo el grupo de Transformaciones U(1): $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Diremos en ese caso que el Lagrangiano, y por consiguiente la Acción, es *invariante gauge local* bajo U(1).

Desarrollando la ec. (3.73), tenemos que

$$\mathcal{D}^\mu\phi \to (\mathcal{D}^\mu\phi)' = \mathcal{D}'^\mu U\phi = U\mathcal{D}^\mu\phi \tag{3.75}$$

Por consiguiente

$$\mathcal{D}'^\mu U = U\mathcal{D}^\mu \tag{3.76}$$

$$\mathcal{D}^\mu \to (\mathcal{D}^\mu)' = U\mathcal{D}^\mu U^{-1} \tag{3.77}$$

Las ecs. (3.73) no se satisfacen para $\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu$. Sin embargo, definiendo

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - igA^\mu \tag{3.78}$$

Para que las ecs. (3.73) se satisfagan

$$\begin{aligned} A^\mu \xrightarrow{U} A^{\mu\prime} &= UA^\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} \\ &= A^\mu - \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} \\ &= A^\mu - \frac{i}{g}\left(i\partial^\mu\theta\right)UU^{-1} \\ &= A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta \end{aligned} \tag{3.79}$$

Así, el campo A^μ que se requiere para satisfacer las propiedades de la derivada covariante transforma justamente como el campo vectorial electromagnético. La ec. (3.78) da lugar a la *sustitución mínima* del operador de momentum

$$p^\mu \to p^\mu + gA^\mu \tag{3.80}$$

Veremos que la carga conservada $U(1)$ se puede identificar con la carga eléctrica. Entonces fijamos

$$g = -e \tag{3.81}$$

Podemos encontrar que

$$F^{\mu\nu} = \frac{i}{g}[\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \tag{3.82}$$

ya que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu}\phi =& \frac{i}{g}[\partial^\mu - igA^\mu, \partial^\nu - igA^\nu]\phi \\ =& \frac{i}{g}\left[\left(\partial^\mu - igA^\mu\right)\left(\partial^\nu - igA^\nu\right)\phi - \left(\partial^\nu - igA^\nu\right)\left(\partial^\mu - igA^\mu\right)\phi\right] \\ =& \frac{i}{g}\left\{\partial^\mu\partial^\nu\phi - g^2A^\mu A^\nu\phi - ig[\partial^\mu(A^\nu\phi) + A^\mu\partial^\nu\phi] - \partial^\nu\partial^\mu\phi + g^2A^\nu A^\mu\phi + ig[\partial^\nu(A^\mu\phi) + A^\nu\partial^\mu\phi]\right\} \\ =& \frac{i}{g}\{(\partial^\mu\partial^\nu - \partial^\nu\partial^\mu)\phi - g^2(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu)\phi - ig[(\partial^\mu A^\nu) - (\partial^\nu A^\mu)]\phi \\ & - ig[A^\nu\partial^\mu\phi + A^\mu\partial^\nu\phi - A^\mu\partial^\nu\phi + A^\nu\partial^\mu\phi]\} \\ =& [(\partial^\mu A^\nu) - (\partial^\nu A^\mu) - ig(A^\mu A^\nu - A^\nu A^\mu)]\phi \end{aligned} \tag{3.83}$$

Como A^μ y A^ν conmutan

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{3.84}$$

Con esta expresión para $F^{\mu\nu}$ podemos demostrar su invarianza gauge a partir de la transformación de la derivada covariante

$$\begin{aligned}(F^{\mu\nu})' &= \frac{i}{g}\left[\mathcal{D}'^\mu, \mathcal{D}'^\nu\right]\\ &= \frac{i}{g}\left[U\mathcal{D}^\mu U^{-1}, U\mathcal{D}^\nu U^{-1}\right]\\ &= UF^{\mu\nu}U^{-1}\\ &= F^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.85}$$

El Lagrangiano más general es

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\phi)^*\mathcal{D}_\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.86}$$

Desarrollando el primer término

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^\mu\phi)^*\mathcal{D}_\mu\phi =& \left[(\partial^\mu + ieA^\mu)\,\phi\right]^*(\partial_\mu + ieA_\mu)\,\phi\\ =& \,(\partial^\mu\phi^* - ieA^\mu\phi^*)\,(\partial_\mu\phi + ieA_\mu\phi)\\ =& \partial^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + ieA_\mu(\partial^\mu\phi^*)\phi - ieA^\mu\phi^*\partial_\mu\phi + e^2A^\mu A_\mu\phi^*\phi\end{aligned} \tag{3.87}$$

Por consiguiente el Lagrangiano en ec. (3.86) puede escribirse como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{escalar}} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int} \tag{3.88}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -ieA_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*) + e^2A^\mu A_\mu\phi^*\phi\,. \tag{3.89}$$

El campo vectorial A^μ aparece como consecuencia de la invarianza gauge del Lagrangiano en ec. (3.74). En tal caso lo llamaremos un *bosón gauge*.

De las ecuaciones de Euler-Lagrange tenemos

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0\\ -\partial_\mu F^{\mu\nu} - e\left[-i(\phi^*\partial^\nu\phi - \phi\partial^\nu\phi^*) + 2eA^\nu\phi^*\phi\right] &= 0\,.\end{aligned} \tag{3.90}$$

Las ecuaciones de movimiento para el campo vectorial son entonces

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ej^\nu \tag{3.91}$$

donde

$$j^\mu = i\left[\phi^*\partial^\mu\phi - (\partial^\mu\phi^*)\phi\right] - 2e\,A^\mu\phi^*\phi = J^\mu - 2e\,A^\mu\phi^*\phi\,. \tag{3.92}$$

Usando la primera ecuación en (3.45), tenemos que ($\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + ie\,A^\mu$)

$$j^\mu = i\left[\phi^*\mathcal{D}^\mu\phi - (\mathcal{D}^\mu\phi)^*\phi\right]. \tag{3.93}$$

De otro lado, las ecuaciones de movimiento para el campo escalar complejo

$$\begin{aligned}\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*}&=0\\ \partial_\mu(\partial^\mu\phi+ie\partial_\mu A^\mu\phi)-(-m^2\phi-ieA_\mu\partial^\mu\phi+e^2A^\mu A_\mu\phi)&=0\\ \partial_\mu\partial^\mu\phi+m^2\phi+ie\partial_\mu(A^\mu\phi)+ieA^\mu\partial_\mu\phi-e^2A^\mu A_\mu\phi&=0\end{aligned}\tag{3.94}$$

dan lugar a

$$(\Box+m^2+\hat{U}(x))\phi=0,\tag{3.95}$$

donde

$$\hat{U}(x)=ie(A^\mu\partial_\mu+\partial_\mu A^\mu)-e^2A^\mu A_\mu\tag{3.96}$$

El operado en el segundo término opera en A_μ y ϕ. A la luz de los resultados la escogencia de la derivada covariante en la ec. (3.78), puede justificarse adicionalmente a partir de la Fuerza de Lorentz para una partícula de carga q moviendose con una velocidad v bajo la influencia tanto del campo magnético como del campo eléctrico

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}.\tag{3.97}$$

Esta expresión puede ser deriva, a través de las ecuaciones de Hamilton, del Hamiltoniano clásico

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2+qA_0\\ H-qA^0&=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}-q\mathbf{A})^2\end{aligned}\tag{3.98}$$

que a su vez puede obtenerse del Hamiltoniano para una partícula libre con el reemplazo

$$H\to H-qA^0\qquad\qquad \mathbf{p}\to\mathbf{p}-q\mathbf{A}\tag{3.99}$$

En términos de los operadores $\hat{H}$ y $\hat{\mathbf{p}}$, tenemos

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t}&\to i\frac{\partial}{\partial t}-qA^0 & -i\nabla&\to-i\nabla-q\mathbf{A}\\ \frac{\partial}{\partial t}&\to\frac{\partial}{\partial t}+iqA^0 & \partial_i&\to\partial_i-iqA^i=\partial_i+iqA_i\,.\end{aligned}\tag{3.100}$$

De modo que

$$\partial^\mu=(\partial^0 0,\partial^i)\to\mathcal{D}^\mu=(\partial^0+iqA^0,\partial^i+iqA^i)=\partial^\mu+iqA^\mu\,.\tag{3.101}$$

3.3.1. Aplicación a barrera de potencial

Considere una barrera de potencial,

$$A^0=\begin{cases}0 & \text{A la izquierda de la barrera (Región I)}\\ V & \text{A la derecha de la barrera (Región II)}\end{cases}\tag{3.102}$$

tal como se muestra en la figura 3.3. Las componentes del campo vectorial son $\mathbf{A} = 0$ y $A_0 = V$, con A_0 independiente del tiempo pues el potencial es constante. Entonces, de la ec. (3.96) tenemos que para le Región II

$$\begin{aligned}\hat{U}(x) &= ie(A^0\partial_0 + \partial_0 A^0) - e^2 A_0^2 \\ &= ie(A^0\partial_0 + A^0\partial_0) - e^2 A_0^2 \\ &= 2ieV\frac{\partial}{\partial t} - e^2V^2\end{aligned} \tag{3.103}$$

y

$$(\Box + m^2 + 2ieV\frac{\partial}{\partial t} - e^2V^2)\phi = 0\,. \tag{3.104}$$

Se sugiere que en la Región I

$$\phi_{\mathrm{I}} = A\,e^{i(pz-Et)} + B\,e^{-i(pz+Et)} \tag{3.105}$$

De acuerdo al cálculo de la corriente en ec. (3.59) esta solución representa partículas con carga positiva.

La exponencial con coeficiente A representa una onda moviéndose a derecha, mientras que la de coeficiente B representa una onda moviéndose a izquierda. Para ver esto considere los paquetes de onda [10]

$$\begin{aligned}e^{i(pz-Et)} &= \exp\left[i\left(\sqrt{E^2-m^2}z - Et\right)\right] \\ &\to \int_{E_0-\Delta E}^{E_0+\Delta E} dE\ \exp\left[i\left(\sqrt{E^2-m^2}z - Et\right)\right]\end{aligned} \tag{3.106}$$

sea $u = E - E_0 \ll 1$, entonces $E = u + E_0$, $dE = du$, $E = E_0 - \Delta E$ da lugar a $u = -\Delta E$, y

$$\begin{aligned}\sqrt{E^2-m^2} = \sqrt{(u+E_0)^2 - m^2} &= \sqrt{u^2 + 2uE_0 + E_0^2 - m^2} \approx \sqrt{2uE_0 + p_0^2} \\ &= p_0\sqrt{1 + \frac{2uE_0}{p_0^2}} \approx p_0(1 + \frac{uE_0}{p_0^2}) = p_0 + \frac{uE_0}{p_0}\end{aligned} \tag{3.107}$$

donde $p_0^2 \equiv |\mathbf{p}_0|^2 = E_0^2 - m^2$. Para una partícula no relativista $E_0/p_0 = m/(mv_0) = 1/v_0$. En general

$$v_0 = \frac{p_0}{E_0} \tag{3.108}$$

$$\sqrt{E^2-m^2} \approx p_0 + \frac{u}{v_0} \tag{3.109}$$

sustituyendo en ec. (3.106)

$$e^{i(pz-Et)} \to \int_{-\Delta E}^{\Delta E} du\ \exp\left\{i\left[\left(p_0 + \frac{u}{v_0}\right)z - (u+E_0)t\right]\right\} \tag{3.110}$$

$$\to e^{ip_0z-E_0t}\int_{-\Delta E}^{\Delta E} du\ \exp\left[i\left(\frac{u}{v_0}z - ut\right)\right] \tag{3.111}$$

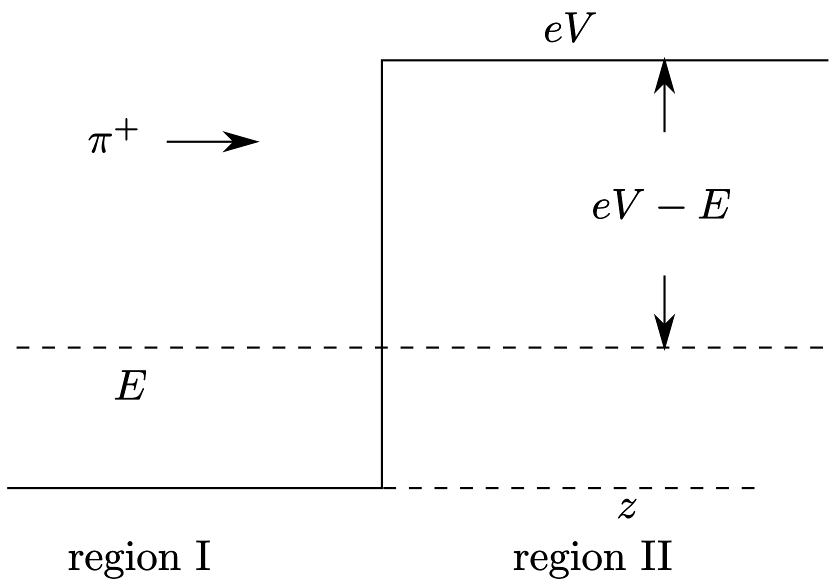

Figura 3.3: Barrera de potencial

$$\to e^{ip_0z-E_0t}\int_{-\Delta E}^{\Delta E} du\ \exp\left[iu\left(\frac{z}{v_0}-t\right)\right] \tag{3.112}$$

$$\to e^{ip_0z-E_0t}\int_{-\Delta E}^{\Delta E} du\ \exp\left[iu\left(\frac{z-v_0t}{v_0}\right)\right] \tag{3.113}$$

Que corresponde a un pulso de energía E_0 y momentum p_0 moviéndose hacia la derecha Sea

$$\eta^- = \frac{z-v_0t}{v_0} \tag{3.114}$$

Entonces

$$f(\eta) = \int_{-\Delta E}^{\Delta E} dE\, e^{iE\eta} = 2\frac{\sin(\eta\Delta E)}{\eta} \tag{3.115}$$

$$\varphi_I = A\, e^{i(p_0z-E_0t)} f\left(\frac{z-v_0t}{v_0}\right) + B\, e^{-i(p_0z+E_0t)} f\left(\frac{z+v_0t}{v_0}\right), \tag{3.116}$$

y $v_0 = p_0/E_0$. Entonces, la parte con coeficiente A corresponde a un π^+ incidente moviendose hacia la derecha, y la parte con coeficiente B a un π^+ reflejado moviendose hacia la izquierda (ver figura 3.3).

Para la Región II, consideramos exponenciales de la misma fase que en la región I pero con el momentum modificado debido ala presencia del potencial. En la región I las soluciones correspondían a partículas con $J^0 = J^0_+ > 0$. En la región II deberemos calcular los correspondientes j^0 de la ec. (3.92) e interpretar el signo resultante

$$\phi_{II} = C\, e^{-i(Pz+Et)} + D\, e^{i(Pz-Et)}. \tag{3.117}$$

Esta es solución a la ec. (3.104)

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+m^2+2ieV\frac{\partial}{\partial t}-e^2V^2\right)\phi_{II}&=0\\ \left(-E^2+P^2+m^2+2eVE-e^2V^2\right)\phi_{II}&=0\\ \left[-(eV-E)^2+P^2+m^2\right]\phi_{II}&=0\end{aligned}\tag{3.118}$$

de modo que

$$P=\sqrt{(eV-E)^2-m^2}\tag{3.119}$$

Note que $P\to p$ cuando $V=0$. Si $eV-E<m$ tenemos la solución amortiguada convencional. Sin embargo, en el caso de una barrera alta $eV-E>m$ tendremos soluciones oscilatorias. En adelante nos concentraremos en ésta posibilidad

El cálculo de la corriente en la Región II, esta dado por j^μ en la ec. (3.92). Para $C=0$ o $D=0$,

$$\begin{aligned}Q=\int_0^L j^0dz&=\int_0^L\left\{i\left[\phi^*\partial^0\phi-\left(\partial^0\phi^*\right)\phi\right]-2e\,A^0\phi^*\phi\right\}dz\\ &=\int_0^L\{i[-iE-(iE)]-2eV\}\,|\phi|^2\,dz\\ &=\begin{cases}-2|C|^2\int_0^L(eV-E)\,dz=-2|C|^2L(eV-E)<0, & D=0\\ -2|D|^2\int_0^L(eV-E)\,dz=-2|D|^2L(eV-E)<0, & C=0\end{cases}\end{aligned}\tag{3.120}$$

y corresponde a una partícula cargada negativamente que interpretaremos como un π^- transmitido, es decir moviendose hacia la derecha. Esto corresponde a la condición de frontera $D=0$ que da lugar a una partícula π^- moviéndose a la derecha. En efecto, el paquete de onda es

$$\varphi_{II}=C\,e^{-i(P_0z+E_0t)}f\left(\frac{z-u_0t}{u_0}\right),\tag{3.121}$$

con

$$u_0=\frac{P_0}{eV-E_0}=\frac{P_0}{\sqrt{P_0^2+m^2}}\tag{3.122}$$

Note que en el caso $V=0$, esta da lugar a un π^+ moviendose a la izquierda como era de esperarse. De manera que emerge un marco consistente de un partícula de masa m y carga $-e$ moviendose hacía la derecha. Esto corresponde a meson π^-. Para completar la descripción, consideramos un π^+ moviendose a la derecha hacia la barrera como en la figura 3.3. Esto significa que cualquier mesón π^- debe ser producido por la interacción con la pared y viajará hacia la derecha dentro de la región II. De aquí que para la condición de frontera $D=0$, la solución normalizando $A=1$ es [10]

$$\begin{aligned}\phi_I&=e^{i(p_0z-E_0t)}f\left(\frac{z-v_0t}{v_0}\right)-\frac{P_0+p_0}{P_0-p_0}\,e^{-i(p_0z+E_0t)}f\left(\frac{z+v_0t}{v_0}\right),\\ \phi_{II}&=-\frac{2p_0}{P_0-p_0}e^{-i(P_0z+E_0t)}f\left(\frac{z-u_0t}{u_0}\right),\end{aligned}\tag{3.123}$$

Este resultado se interpreta diciendo que el pión incidente no solo se dispersa en la barrera ($B\neq 1$), sino que también estimula la barrera para producir un par $\pi^+\pi^-$, el $\pi-$ viaja dentro de la barrera la cual ve como un hueco, mientras que el π^+ producido por la barrera viaja hacia la izquierda. Si J^0 y j^0 son interpretados como la densidad de carga, la interpretación es consistente y tiene sentido físico. La energía y la carga se conservan [10].

Example 3.3.1.1
Escriba la ec. (3.86) en coordenadas polares.

Sea $\phi = e^{i\eta(x)}\rho(x)/\sqrt{2}$, con η y ρ reales. Bajo una tranformación gauge

$$
\begin{aligned}
A^\mu \to A'^\mu &= A^\mu + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta \\
\phi \to \phi' &= e^{i\theta(x)}e^{i\eta(x)}\frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
\tag{3.124}
$$

Si fijamos el gauge tal que $\theta = -\eta$, entonces $\phi' = \rho$, y

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \left[(\mathcal{D}_\mu)'\,\phi'\right]^*(\mathcal{D}^\mu)'\,\phi' - \left(m^2\phi^*\phi\right)' - \frac{1}{4}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)' \\
\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= \left(\partial_\mu + igA_\mu{}'\right)\phi^{*\prime}\left(\partial^\mu - igA^{\mu\prime}\right)\phi' - \left(m^2\phi^*\phi\right)' - \frac{1}{4}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)' \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu + igA_\mu{}'\right)\rho\left(\partial^\mu - igA^{\mu\prime}\right)\rho - \tfrac{1}{2}m^2\rho^2 - \frac{1}{4}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)'
\end{aligned}
$$

En adelante, podemos quitar la prima del campo A^μ

$$
\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\partial^\mu\rho\partial_\mu\rho - \tfrac{1}{2}m^2\rho + g^2A^\mu A_\mu\rho^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\tag{3.125}
$$

Aunque este gauge es de poca utilidad en este contexto, será de mucha utilidad en la discusión del rompimiento espontáneo de simetría.

3.4. Aplicación a la mecánica cuántica

De la ecuación (3.98) podemos obtener la ecuación de Schödinger en presencia de un campo electromagnético

$$
\begin{aligned}
\widehat{H}\psi &= \left[\frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2 + qA_0\right]\psi \\
i\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla - q\mathbf{A})^2 + qA_0\right]\psi\,.
\end{aligned}
\tag{3.126}
$$

Que puede reescribirse como

$$
\begin{aligned}
i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0\right)\psi &= i^2\frac{1}{2m}(\nabla - iq\mathbf{A})^2\psi \\
i\left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0\right)\psi &= -\frac{1}{2m}(\nabla - iq\mathbf{A})^2\psi
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

Definiendo el cuadrivector

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^\mu &= (\mathcal{D}^0, -\boldsymbol{\mathcal{D}}) \\
&\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0, -(\nabla - iq\mathbf{A})\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0, -\partial_i + iqA^i)\right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} + iqA^0, \partial^i + iqA^i\right) \\
&= \partial^\mu + iqA^\mu
\end{aligned} \tag{3.128}
$$

tenemos

$$
i\mathcal{D}^0\psi = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi \tag{3.129}
$$

que para $A^\mu = 0$ se reduce a la ecuación de Schrödinger para una partícula libre. Bajo la transformación gauge en el campo A^μ de la ec. (3.79),

$$
\begin{aligned}
A^0 \to A'^0 &= A^0 - \frac{1}{q}\partial^0\theta \\
\mathbf{A} \to \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \frac{1}{q}\boldsymbol{\nabla}\theta
\end{aligned} \tag{3.130}
$$

los campos **E** y **B** permanecen los mismos. Para que la mecánica cuántica sea consistente con las ecuaciones de Maxwell es necesario que las transformaciones gauge (3.79) de los potenciales de Maxwell estén acompañados por una transformación de la función de onda, $\psi \to \psi'$, donde ψ' satisface la ecuación

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\mathcal{D}}'^2\psi' \\
i\frac{\partial}{\partial t}\psi' &= \left[\frac{1}{2m}(-i\nabla' - q\mathbf{A}')^2 + qA'_0\right]\psi' \,.
\end{aligned} \tag{3.131}
$$

Como la forma de la ecuación (3.131) es exactamente la misma que la forma de (3.129) entonces ambas describen la misma física. Si podemos encontrar la forma de ψ' podemos afirmar que la ec. (3.129) es covariante gauge, lo que significa que mantiene la misma forma bajo una transformación gauge. Como conocemos como transforma A^μ podemos encontrar cual debe ser el ψ' que hace que la ecuación (3.131) sea consistente con (3.129). Vamos a establecer la respuesta y verificarla. El ψ' requerido es

$$
\psi \to \psi' = e^{i\theta(x)}\psi \tag{3.132}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{D}}'\psi' &= \left[(\boldsymbol{\nabla} - iq\mathbf{A}) - i\boldsymbol{\nabla}\theta\right] e^{i\theta(x)}\psi \\
&= i(\boldsymbol{\nabla}\theta)e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\boldsymbol{\nabla}\psi - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}\psi - i\boldsymbol{\nabla}\theta e^{i\theta(x)}\psi \\
&= e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\nabla} - iq\mathbf{A})\psi \\
&= e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi)
\end{aligned} \tag{3.133}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{D}}'^2\psi' &= \boldsymbol{\mathcal{D}}'(\boldsymbol{\mathcal{D}}'\psi') \\
&= [(\boldsymbol{\nabla} - iq\mathbf{A}) - i\boldsymbol{\nabla}\theta]\, e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi) \\
&= i(\boldsymbol{\nabla}\theta)e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi) + e^{i\theta(x)}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi) - iq\mathbf{A}e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi) - i\boldsymbol{\nabla}\theta e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi) \\
&= e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\nabla} - iq\mathbf{A})(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi) \\
&= e^{i\theta(x)}(\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi)
\end{aligned}
\tag{3.134}
$$

De la misma manera

$$\mathcal{D}'^0\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^0\psi) \tag{3.135}$$

De modo que

$$\mathcal{D}^\mu\psi \to \mathcal{D}'^\mu\psi' = e^{i\theta(x)}(\mathcal{D}^\mu\psi) \tag{3.136}$$

y la derivada covariante del campo transforma como el campo. Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
i\mathcal{D}'^0\psi' &= -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\mathcal{D}}'^2\psi' \\
ie^{i\theta(x)}\mathcal{D}^0\psi &= -\frac{1}{2m}e^{i\theta(x)}\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi \\
i\mathcal{D}^0\psi &= -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi
\end{aligned}
\tag{3.137}
$$

En resumen, para

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu + iqA^\mu \tag{3.138}$$

y reemplazando $\theta \to q\theta$ tenemos

$$
\begin{aligned}
A^\mu &\to A^{\mu\prime} = A^\mu - \partial^\mu\theta(x) \\
\psi &\to \psi' = e^{iq\theta(x)}\psi \\
\mathcal{D}^\mu\psi &\to \mathcal{D}'^\mu\psi' = e^{iq\theta(x)}(\mathcal{D}^\mu\psi)\,.
\end{aligned}
\tag{3.139}
$$

En este convención q corresponde al *generador* de la transformación y θ al parámetro de la transformación.

El correspondiente Lagrangiano es (ver ec. (1.63))

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} =&\frac{1}{2m}(\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi)^*\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi - \frac{i}{2}\left(\psi^*\mathcal{D}^0\psi - (\mathcal{D}^0\psi)^*\psi\right) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
=&\frac{1}{2m}(\partial^i - iqA^i)\psi^*(\partial^i + iqA^i)\psi - \frac{i}{2}\left(\psi^*(\partial^0 + iqA^0)\psi - [(\partial^0 - iqA^0)\psi^*]\psi\right) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
=&\frac{1}{2m}(\partial^i\psi^* - iqA^i\psi^*)(\partial^i\psi + iqA^i\psi) - \frac{i}{2}\left[\psi^*(\partial^0\psi + iqA^0\psi) - (\partial^0\psi^* - iqA^0\psi^*)\psi\right] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
=&\frac{1}{2m}[\partial^i\psi^*\partial^i\psi + iq(\partial^i\psi^*)\psi A^i - iq\psi^*(\partial^i\psi)A^i + q^2A^iA^i\psi^*\psi] \\
&- \frac{i}{2}\left[\psi^*(\partial^0\psi) - (\partial^0\psi^*)\psi + 2iq\psi^*\psi A^0\right] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

La corriente se obtiene de la ecuaciones de Euler-Lagrange para A^ν

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

con

$$
\begin{aligned}
-j_\nu =&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu}\\
=&\begin{cases} q\psi^*\psi & \nu=0\\ \frac{iq}{2m}[(\partial^i\psi^*)\psi-\psi^*\partial^i\psi-2iq\psi^*\psi A^i] & \nu=i\end{cases}
\end{aligned}
$$

Que incluye el término corriente para una partícula cargada y es diferente de la corriente de probabilidad en ec.(1.71). En otras palabras es la carga eléctrica la que se converva localmente. Note que para el Lagrangiano de Klein-Gordon de un campo escalar complejo a nivel clásico no esta definida la probabilidad.

De otro lado las ecuaciones de Euler–Lagrange para el campo ψ^* son

$$
\begin{aligned}
0 =&\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\psi^*\right)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*}=\partial_0\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_0\psi^*\right)}\right]+\partial_i\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_i\psi^*\right)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^*}\\
=&\frac{i}{2}\partial_0\psi+\frac{1}{2m}\partial_i\left(\partial_i\psi+iqA_i\psi\right)-\left[\frac{1}{2m}\left(-iq(\partial^i\psi)A^i+q^2A^iA^i\psi\right)-\frac{i}{2}\partial^0\psi+qA^0\psi\right]\\
=&\frac{i}{2}\partial_0\psi+\frac{i}{2}\partial^0\psi-qA^0\psi+\frac{1}{2m}\partial_i\left(\partial_i\psi+iqA_i\psi\right)+\frac{1}{2m}\left[iq(\partial^i\psi)A^i-q^2A^iA^i\psi\right]\\
=&i\partial_0\psi+i^2qA^0\psi+\frac{1}{2m}\partial_i\left(\partial_i\psi+iqA_i\psi\right)+\frac{1}{2m}\left[iqA^i(\partial^i\psi+iqA^i\psi)\right]\\
=&i(\partial_0+iqA_0)\psi+\frac{1}{2m}\left(\partial_i+iqA_i\right)\left(\partial_i+iqA_i\right)\psi\\
=&i\mathcal{D}_0\psi+\frac{1}{2m}\mathcal{D}_i\mathcal{D}_i\psi\\
i\mathcal{D}_0\psi =&-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\mathcal{D}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{D}}\psi\\
i\mathcal{D}_0\psi =&-\frac{1}{2m}\boldsymbol{\mathcal{D}}^2\psi
\end{aligned}
$$

Que corresponde a la ec.(3.137), es decir, la ecuación de Scrödinger con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante.

3.5. Invarianza gauge local no abeliana

Las interacciones débiles son mediadas por bosones gauges cargados $W_\mu^\pm$. ¿Qué simetría puede dar lugar a la aparición de dichos bosones gauge?

El Lagrangiano invariante de Lorentz para un doblete escalar complejo

$$
\Phi=\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix}, \tag{3.140}
$$

con ϕ^+ y ϕ^0 campos escalares complejos es

$$
\mathcal{L}=\left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)\partial_\mu\Phi-m^2\Phi^\dagger\Phi. \tag{3.141}
$$

donde

$$
\Phi^\dagger=\begin{pmatrix}\phi^- & \phi^{0*}\end{pmatrix}, \tag{3.142}
$$

de modo que

$$\mathcal{L} = \partial^\mu\phi^-\partial_\mu\phi^+ - m^2\phi^-\phi^+ + \partial^\mu\phi^{0*}\partial_\mu\phi^0 - m^2\phi^{0*}\phi^0 \tag{3.143}$$

que corresponde a los Lagrangianos de las partículas escalares compleja ϕ^+ y ϕ^0 de la misma masa. De modo que este Lagrangiano se puede obtener con una generalización similar a la que dio lugar al Lagrangiano para un campo escalar complejo a partir de dos campos escalares reales. Note que en este contexto un campo escalar complejo puede ser neutro porque tiene cargas adicionales. En este caso una carga de isospín débil como veremos más adelante.

El Lagragiano en ec. (3.143) es invariante bajo transformaciones globales

$$\phi \to \phi' = e^{iq\theta}\phi \approx \begin{cases} (1+iq\theta)\phi^+ = [1+i(+1)\theta]\phi^+, & [(1+iq\theta)\phi^+]^* = [1+i(-1)\theta]\phi^- \\ (1+iq\theta)\phi^0 = [1+i(0)\theta]\phi^0 = \phi^0, & [(1+iq\theta)\phi^0]^* = \phi^{0*} \end{cases} \tag{3.144}$$

Estas ecuaciones se pueden escribir de forma más compacta en términos del Lagrangiano en ec. (3.141)

$$\Phi \to \Phi' = V\Phi = e^{iQ\theta}\Phi \tag{3.145}$$

donde V es la matriz 2×2

$$V = e^{iQ\theta} = (1+iQ\theta)\Phi = \Phi + i\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Phi = \Phi + i\theta\begin{pmatrix} (+1)\phi^+ \\ (0)\phi^0 \end{pmatrix} \tag{3.146}$$

donde Q es el generador de carga eléctrica. Es claro que el Lagrangiano en ec. (3.141) es invariante bajo la transformación (3.145). Si imponemos que la carga eléctrica se conserve localmente

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger\,\mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{3.147}$$

Expandiendo tenemos, teniendo en cuenta la ec. (3.163)[1],

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left(\partial^\mu\Phi^\dagger + ie\Phi^\dagger QA^\mu\right)\left(\partial_\mu\Phi - ieA_\mu Q\Phi\right) - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&= \partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + ie\left(\Phi^\dagger QA_\mu\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)A_\mu Q\Phi\right) + e^2\Phi^\dagger QA^\mu QA_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&= \partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + ie\left(\Phi^\dagger A_\mu Q\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)A_\mu Q\Phi\right) + e^2\Phi^\dagger Q^2A^\mu A_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&= \partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + ie\left(\Phi^\dagger Q\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)Q\Phi\right)A_\mu + e^2\Phi^\dagger QA^\mu A_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&= \partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + \left[i\Phi^\dagger(eQA_\mu)\partial^\mu\Phi + \text{h.c}\right] + e^2\Phi^\dagger QA^\mu A_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.148}$$

Además, el Lagrangiano en ec. (3.141) también es invariante bajo transformaciones $SU(2)$ globales:

$$\begin{aligned}
\Phi &\xrightarrow{U} \Phi' = U\Phi \\
\Phi^\dagger &\xrightarrow{U} \left(\Phi^\dagger\right)' = \Phi^\dagger U^\dagger,
\end{aligned} \tag{3.149}$$

con

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \qquad \det U = 1 \tag{3.150}$$

[1]Hasta aquí muchos de los resultados son independientes de la representación de $SU(2)$ usada y se puede pasar a la sección 3.7

En general, un elemento del Grupo $SU(N)$ puede escribirse como

$$U = \exp(iT^j\theta_j) \tag{3.151}$$

donde θ_j son los parámetros de la transformación y T^j corresponden a los N^2-1 generadores del Grupo. Estos generadores deben ser hermíticos, de traza nula, es decir

$$\mathrm{Tr}\, T^i = 0 \qquad T^\dagger = T \tag{3.152}$$

y satisfacer el álgebra

$$[T^i, T^j] = i f_{ijk} T^k \tag{3.153}$$

donde a f_{ijk}, $i,j,k = 1,\ldots,N^2-1$, se les llama *constantes de estructura* del Grupo y son antisimétricas en todos los índices.

Una representación del grupo $SU(2)$ se puede obtener con las matrices de Pauli 2×2 [15], que satisfacen el álgebra

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}\right] = i\,\epsilon_{ijk}\frac{\tau^k}{2} \tag{3.154}$$

donde τ^i

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.155}$$

dividas por dos, corresponden a los generadores del Grupo. Las constantes de estructura del Grupo corresponden a ϵ_{ijk}. Como los generadores no conmutan, $SU(2)$ es un Grupo de Lie no Abeliano. Definiendo los generadores de $SU(2)$ como

$$T^i = \frac{\tau_i}{2}, \tag{3.156}$$

un elemento del Grupo puede escribirse como

$$U = e^{iT^i\theta_i} \approx 1 + iT^i\theta_i = 1 + i\frac{\tau^i}{2}\theta_i\,. \tag{3.157}$$

Como antes, θ_i es el parámetro de la transformación. Siempre que sea posible intentaremos expresar los resultados independiente de la representación para usarlos de nuevo en la sección 3.7.

Las matrices de Pauli y por consiguiente T_i satisfacen

$$\begin{aligned} \tau_i^\dagger &= \tau_i \\ \mathrm{Tr}\,(\tau_i) &= 0 \end{aligned} \tag{3.158}$$

Además

$$\begin{aligned} \det(\tau_i) &= -1 \\ \{\tau_i, \tau_j\} &= 2\delta_{ij}\cdot I \Rightarrow \tau_i^2 = I \\ \mathrm{Tr}\left(\tau^i\tau^j\right) &= 2\delta^{ij} \\ \tau_i\tau_j &= i\epsilon_{ijk}\tau_k + \delta_{ij} \end{aligned} \tag{3.159}$$

Para demostrar la última propiedad por ejemplo, tenemos del anticonmutador que

$$\begin{aligned}
\tau_i\tau_j + \tau_j\tau_i &= 2\delta_{ij}\\
\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j + \tau_j\tau_i) &= 2\delta_{ij}\,\mathrm{Tr}\,I\\
\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) + \mathrm{Tr}(\tau_j\tau_i) &= 4\delta_{ij}\\
\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) + \mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) &= 4\delta_{ij}\\
2\,\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) &= 4\delta_{ij}\\
\mathrm{Tr}(\tau_i\tau_j) &= 2\delta_{ij}
\end{aligned}$$

El campo Φ corresponde a un doblete de $SU(2)$. Este grupo $SU(2)$, con algunas modificaciones que no afectan la actual descripción, será usado para generar las interacciones débiles, de forma análoga a como el grupo $U(1)$ se uso para generar las interacciones electromagnéticas. Es decir a partir del principio gauge local. De momento, cada componente del doblete tiene una carga de isospín débil que se conserva globalmente y que corresponde a

$$T_3\Phi = \frac{\tau_3}{2}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\phi^+ \\ -\frac{1}{2}\phi^0 \end{pmatrix}. \tag{3.160}$$

Es decir ϕ^+ tiene isospín débil $1/2$ y ϕ^0 $-1/2$.

En esta sección analizaremos la posibilidad de convertir la invarianza gauge global no abeliana a una invarianza gauge local. En la próxima sección se convertirán todas las invarianzas gauge globales del Lagrangiano a locales.

Como en el caso Abeliano, ahora requeriremos que la Acción también sea invariante bajo transformaciones locales $SU(2)$, de modo que $\theta_i = \theta_i(x)$. Ya que tenemos tres parámetros gauge $\theta_i(x)$ esto requiere la introducción de 3 campos gauge W_i^μ, y la derivada covariante es ahora una matriz 2×2:

$$\partial^\mu \to \mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - igT^iW_i^\mu \equiv \partial^\mu - igW^\mu, \tag{3.161}$$

donde $\partial^\mu = I\cdot\partial^\mu$ y W^μ es una matriz 2×2 de componentes

$$(W^\mu)_{ab} = \left(\frac{\tau^i}{2}\right)_{ab} W_i^\mu. \tag{3.162}$$

Además

$$W^{\mu\dagger} = W^\mu. \tag{3.163}$$

El Lagrangiano invariante gauge local bajo $SU(2)$ es

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger\,\mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi. \tag{3.164}$$

Muchas de las ecuaciones en sección 3.3 aplican igualmente aquí. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi &\to \Phi' = U\Phi\\
\Phi^\dagger &\to \Phi'^\dagger = \Phi^\dagger U^\dagger\\
\mathcal{D}_\mu\Phi &\to (\mathcal{D}_\mu\Phi)' = U(\mathcal{D}_\mu\Phi)\\
\mathcal{D}_\mu\Phi^\dagger &\to (\mathcal{D}_\mu\Phi)'^\dagger = (\mathcal{D}_\mu\Phi)^\dagger U^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.165}$$

Además

$$\Phi' \approx (1 + iT^i\theta_i)\Phi \Rightarrow \delta\Phi = \Phi' - \Phi \approx iT^i\theta_i\Phi \tag{3.166}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \to \mathcal{L}' &= (\mathcal{D}^\mu\Phi)'^\dagger(\mathcal{D}_\mu\Phi)' - m^2\Phi'^\dagger\Phi' \\ &= (\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger U^\dagger U\mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger U^\dagger U\Phi \\ &= \mathcal{L}\,,\end{aligned} \tag{3.167}$$

y el Lagrangiano, y por consiguiente la acción, es invariante bajo transformaciones gauge locales $SU(2)$

De la definición de derivada covariante:

$$\mathcal{D}^\mu \to (\mathcal{D}^\mu)' = U\mathcal{D}^\mu U^\dagger. \tag{3.168}$$

Las matrices W^μ transforman como

$$W^\mu \xrightarrow{U} (W^\mu)' = UW^\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^\dagger \tag{3.169}$$

Entonces

$$\begin{aligned}T^iW'^\mu_i \approx&(1 + i\theta_jT^j)T^kW^\mu_k(1 - i\theta_lT^l) - \frac{i}{g}[i(\partial^\mu\theta_m)T^m(1 - i\theta_nT^n)] \\ =&(T^k + i\theta_jT^jT^k)(1 - i\theta_lT^l)W^\mu_k - \frac{i}{g}[i(\partial^\mu\theta_m)T^m(1 - i\theta_nT^n)] \\ \approx&[T^k - i\theta_lT^kT^l + i\theta_jT^jT^k]W^\mu_k + \frac{1}{g}T^m\partial^\mu\theta_m \\ =&[T^k - i\theta_j(T^kT^j - T^jT^k)]W^\mu_k + \frac{1}{g}T^m\partial^\mu\theta_m \\ =&T^iW^\mu_i - i(i\epsilon^{ikj}T^i)W^\mu_k\theta_j + \frac{1}{g}T^i\partial^\mu\theta_i \\ =&T^i\left(W^\mu_i + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta_i + \epsilon^{ikj}W^\mu_k\theta_j\right)\end{aligned} \tag{3.170}$$

de donde

$$W^\mu_i \to W'^\mu_i \approx W^\mu_i + \frac{1}{g}\partial^\mu\theta_i + \epsilon^{ijk}W^\mu_j\theta_k \tag{3.171}$$

que se reduce al caso Abeliano (3.79) cuando las constates de estructura son cero. Como era de esperarse cada campo gauge tiene asociado un parámetro de transformación gauge $\theta_i(x)$.

Podemos introducir el tensor de intensidad del campo gauge a partir la ec. (3.85)

$$W^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[\mathcal{D}^\mu, \mathcal{D}^\nu] \tag{3.172}$$

De la ec. (3.84)

$$\begin{aligned}W^{\mu\nu} =&\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - ig(W^\mu W^\nu - W^\nu W^\mu) \\ =&\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - ig[W^\mu, W^\nu]\,.\end{aligned} \tag{3.173}$$

Usando la ec. (3.162), y la ec. (3.154)

$$\begin{aligned} W^{\mu\nu} =& T^i(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - ig\left[T^i, T^j\right] W_i^\mu W_j^\nu \\ =& T^i(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) - ig\left(i\epsilon_{ijk}T^k\right) W_i^\mu W_j^\nu \\ =& T^i(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu) + g\epsilon_{ijk}T^i W_j^\mu W_k^\nu \\ =& T^i W_i^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.174}$$

donde

$$W_i^{\mu\nu} = \partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\nu + g\,\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu, \tag{3.175}$$

que se reduce a la forma usual cuando las constantes de estructura del Grupo son cero. Usando la ec. (3.85)

$$W^{\mu\nu} \to (W^{\mu\nu})' = U W^{\mu\nu} U^\dagger, \tag{3.176}$$

De modo que la traza de $W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}$

$$\operatorname{Tr}(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) \to \operatorname{Tr}(W'^{\mu\nu}W'_{\mu\nu}) = \operatorname{Tr}(UW^{\mu\nu}U^\dagger U W_{\mu\nu}U^\dagger) = \operatorname{Tr}(U^\dagger U W^{\mu\nu}U^\dagger U W_{\mu\nu}) = \operatorname{Tr}(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu})\,, \tag{3.177}$$

es invariante. Además Usando la ec. (3.159), podemos obtener el Lagragiano libre invariante gauge del los campos W_i^μ

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &\equiv -\tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) \\ &= -\tfrac{1}{8}\operatorname{Tr}\left(\tau^i\tau_j\right) W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^j \\ &= -\tfrac{1}{4}\delta_j^i W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^j \\ &= -\tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i \\ \mathcal{L}_W &= -\tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i, \end{aligned} \tag{3.178}$$

que además de los términos cinéticos usuales, da lugar a términos de auto-interacción entre los bosones gauge. Ésta es una característica del carácter no Abeliano de la simetría $SU(2)$.

Por consiguiente, la Acción más general para los campos Φ y W_i^μ invariante gauge local $SU(2)$ está dada por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \left(\mathcal{D}^\mu\Phi\right)^\dagger \mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) \tag{3.179}$$

Expandiendo tenemos, teniendo en cuenta la ec. (3.163)[2],

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(\partial^\mu\Phi^\dagger + ig\Phi^\dagger W^{\mu\dagger}\right)\left(\partial_\mu\Phi - igW_\mu\Phi\right) - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) \\ &= \partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + ig\left(\Phi^\dagger {W_\mu}^\dagger\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)W_\mu\Phi\right) + g^2\Phi^\dagger W^{\mu\dagger}W_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i \\ \mathcal{L} &= \partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + ig\left(\Phi^\dagger W_\mu\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)W_\mu\Phi\right) + g^2\Phi^\dagger W^\mu W_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i\,. \end{aligned} \tag{3.180}$$

[2]Hasta aquí muchos de los resultados son independientes de la representación de $SU(2)$ usada y se puede pasar a la sección 3.7

De la ec. (3.162), tenemos que W_μ es

$$\begin{aligned}
W_\mu &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W_\mu^1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} W_\mu^2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} W_\mu^3 \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}\,\dfrac{W_\mu^1 - i\,W_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\,\dfrac{W_\mu^1 + i\,W_\mu^2}{\sqrt{2}} & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \\
&\equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^+ \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 \end{pmatrix}. \qquad (3.181)
\end{aligned}$$

Siempre que no haya lugar a confusión, es costumbre no poner el índice μ a los campos vectoriales componentes de W^μ, de modo que

$$W^\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}^\mu . \qquad (3.182)$$

Ya que

$$\begin{aligned}
2\Phi^\dagger W_\mu \partial^\mu \Phi &= \begin{pmatrix} \phi^- & \phi^{0*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}_\mu \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi^+ \\ \partial^\mu \phi^0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \phi^- W_\mu^3 + \sqrt{2}\phi^{0*} W_\mu^- & \sqrt{2}\phi^- W_\mu^+ - \phi^{0*} W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^\mu \phi^+ \\ \partial^\mu \phi^0 \end{pmatrix} \\
&= \phi^- \left(\partial^\mu \phi^+\right) W_\mu^3 + \sqrt{2}\phi^{0*}\left(\partial^\mu \phi^+\right) W_\mu^- + \sqrt{2}\left(\partial^\mu \phi^0\right)\phi^- W_\mu^+ - \left(\partial^\mu \phi^0\right)\phi^{0*} W_\mu^3 \qquad (3.183)
\end{aligned}$$

$$2\partial^\mu \Phi^\dagger W_\mu \Phi = \left(\partial^\mu \phi^-\right)\phi^+ W_\mu^3 + \sqrt{2}\left(\partial^\mu \phi^{0*}\right)\phi^+ W_\mu^- + \sqrt{2}\left(\partial^\mu \phi^-\right)\phi^0 W_\mu^+ - \left(\partial^\mu \phi^{0*}\right)\phi^0 W_\mu^3 . \qquad (3.184)$$

Usando estas ecuaciones, los términos de interacciones entre dos campos escalares y un bosón gauge se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_3 &= ig\left(\Phi^\dagger W_\mu \partial^\mu \Phi - \left(\partial^\mu \Phi^\dagger\right) W_\mu \Phi\right) \\
\mathcal{L}_3 &= g J_{\rm nc}^\mu W_\mu^3 + \left(g J_{\rm cc}^\mu W_\mu^+ + \text{h.c}\right), \qquad (3.185)
\end{aligned}$$

donde $J_{\rm nc}^\mu$, $J_{\rm cc}^\mu$ son las corrientes neutras y las corrientes cargadas respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}
2\,J_{\rm nc}^\mu =& i\left[\phi^-\left(\partial^\mu \phi^+\right) - \left(\partial^\mu \phi^-\right)\phi^+\right] - i\left[\left(\partial^\mu \phi^0\right)\phi^{0*} - \left(\partial^\mu \phi^{0*}\right)\phi^0\right] \\
2\,J_{\rm cc}^\mu =& i\sqrt{2}\left[\left(\partial^\mu \phi^0\right)\phi^- - \left(\partial^\mu \phi^-\right)\phi^0\right]. \qquad (3.186)
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
W^\mu W_\mu &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}_\mu \begin{pmatrix} W^3 & \sqrt{2}W^+ \\ \sqrt{2}W^- & -W^3 \end{pmatrix}^\mu \\
&= \tfrac{1}{4}\left(W_3^\mu W_\mu^3 + 2W_\mu^+ W^{\mu -}\right)\cdot I, \qquad (3.187)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 \equiv& g^2\Phi^\dagger W^\mu W_\mu \Phi\\ =&\tfrac{1}{4}g^2\left(W_3^\mu W_\mu^3 + 2W_\mu^+ W^{\mu-}\right)\left(\phi^-\phi^+ + \phi^{0*}\phi^0\right)\\ =&\tfrac{1}{4}g^2\left(W_3^\mu W_\mu^3\phi^-\phi^+ + W_3^\mu W_\mu^3\phi^{0*}\phi^0 + 2W_\mu^+ W^{\mu-}\phi^-\phi^+ + 2W_\mu^+ W^{\mu-}\phi^{0*}\phi^0\right)\end{aligned} \tag{3.188}$$

corresponde a términos de interacción cuárticas entre los campos escalares y los campos gauge.

Usando las ecs. (3.185), (3.188) y (3.178), el Lagrangiano en la ec. (3.180) se puede escribir cómo

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\phi^\pm} + \mathcal{L}_{\phi^0} + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_W. \tag{3.189}$$

Donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\phi^\pm} &= \partial^\mu\phi^+\partial_\mu\phi^- - m^2\phi^+\phi^-\\ \mathcal{L}_{\phi^0} &= \partial^\mu\phi^{0*}\partial_\mu\phi^0 - m^2\phi^{0*}\phi^0,\end{aligned} \tag{3.190}$$

La Acción definida por el Lagrangiano en ec. (3.189) es invariante bajo el grupo $U(1)_Q$, definido por

$$\begin{aligned}\phi^+ &\to \left(\phi^+\right)' = e^{i\eta(x)q_+}\phi^+\\ \phi^0 &\to \left(\phi^+\right)' = e^{i\eta(x)q_0}\phi^0 \approx \phi^0 + i\eta(x)\,q_0\phi^0 = \phi^0,\end{aligned} \tag{3.191}$$

donde, usando el mismo lenguaje que en el caso no Abeliano, q_α $(\alpha = +, 0)$ es el generador del Grupo $U(1)_Q$, que se interpreta como la carga eléctrica: $\hat{q}\phi^\alpha = q_\alpha\phi^\alpha$ (no hay suma sobre α). Esto resultó ser una simetría accidental del Lagrangiano propuesto y sólo se mantiene a nivel global. Si queremos que la carga eléctrica se converve localmente debemos llevar la invarianza gauge abelina gloabal a una local de modo que tengamos el Grupo gauge local $SU(2) \times U(1)$ correspondiente a un grupo semisimple

3.6. Invarianza gauge local para un grupo semisimple

El superíndice en el doblete escalar puede ser interpretado como carga eléctrica (en unidades de e) si bajo el operador diagonal de carga

$$\hat{Q}\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_+ & 0\\ 0 & q_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_+\phi^+\\ q_0\phi^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(+1)\phi^+\\ (0)\phi^0\end{pmatrix} \tag{3.192}$$

de modo que

$$Q\Phi = \begin{pmatrix}+1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Phi \tag{3.193}$$

En esta sección impondremos que las transformaciones bajo el grupo semisimple $SU(2)\times U(1)_Y \supset U(1)_Q$, dejen invariante la Acción definida por el Lagrangiano en ec. (3.179).

Para el caso Abeliano usaremos la misma estructura de la derivada covariante en ec. (3.161) donde el coeficiente del campo gauge contiene el acoplamientos gauge y el generador de las transformaciones correspondientes. El doblete escalar complejo debe transformar bajo $U(1)_Y$ como

$$\phi \overset{U(1)_Y}{\to} \Phi' = e^{i\alpha Y}\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} \approx \Phi + i\alpha Y_\Phi \Phi, \tag{3.194}$$

de modo que la hipercarga Y debe ser la misma para las dos componentes del doblete.

El efecto de la transformación completa $SU(2)\times U(1)_Y$ es

$$\Phi \overset{SU(2)\times U(1)_Y}{\longrightarrow} \Phi' = e^{i(\theta_j T^j + \alpha Y\cdot I)}\Phi. \tag{3.195}$$

Para que la Acción definida por el Lagrangiano en ec. (3.141) sea invariante gauge local bajo $SU(2)\times U(1)_Y$, debemos cambiar la derivada normal por la derivada covariante:

$$\begin{aligned}\partial^\mu \to \mathcal{D}^\mu \equiv& \partial^\mu - igT^iW_i^\mu - ig'YB^\mu,\\ =& \partial^\mu - igT^1W_1^\mu - igT^2W_2^\mu - igT^1W_1^\mu - ig'YB^\mu,\\ =& \partial^\mu - i\begin{pmatrix}\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.196}$$

y, adicionar todos los términos invariantes gauge asociados a los campos Φ, W^μ, y B^μ:

$$\mathcal{L} = \left(\mathcal{D}^\mu\Phi\right)^\dagger \mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) - \tfrac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \tag{3.197}$$

Expandiendo

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&[\partial^\mu\Phi^\dagger + i\Phi^\dagger(gT^iW_i^\mu + g'YB^\mu)][\partial_\mu\Phi - i(gT^iW_\mu^i + g'YB_\mu)\Phi] - m^2\Phi^\dagger\Phi\\ &- \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) - \tfrac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\\ =&\partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + i\Phi^\dagger(gT^iW_i^\mu + g'YB^\mu)\partial_\mu\Phi - i\partial^\mu\Phi^\dagger(gT^iW_\mu^i + g'YB_\mu)\Phi\\ &+ \Phi^\dagger(gT^iW_i^\mu + g'YB^\mu)(gT^iW_\mu^i + g'YB_\mu)\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi\\ &- \tfrac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right) - \tfrac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.198}$$

Las nuevas corrientes se puede obtener de:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \supset& i\Phi^\dagger\begin{pmatrix}\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu\end{pmatrix}\partial^\mu\Phi\\ &- i\partial^\mu\Phi^\dagger\begin{pmatrix}\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu\end{pmatrix}\Phi\\ &+ \Phi^\dagger\begin{pmatrix}\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^+\\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW_\mu^- & -\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}gW_3^\mu + g'YB^\mu & \frac{1}{\sqrt{2}}gW^{+\mu}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}gW^{-\mu} & -\frac{1}{2}gW_3^\mu + g'YB^\mu\end{pmatrix}\Phi\end{aligned} \tag{3.199}$$

Para las corrientes involucrando tres campos tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \supset& i\left(\phi^-(\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\phi^{0*}W_\mu^- \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\phi^-W_\mu^+ + \phi^{0*}(-\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu)\right)\partial^\mu\Phi\\ &- i\left(\partial^\mu\phi^-(\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\partial^\mu\phi^{0*}W_\mu^- \quad \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\partial^\mu\phi^-W_\mu^+ + \partial^\mu\phi^{0*}(-\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu)\right)\Phi\\ \supset& i\{[\phi^-(\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\phi^{0*}W_\mu^-]\partial^\mu\phi^+ + [\tfrac{1}{\sqrt{2}}g\phi^-W_\mu^+ + \phi^{0*}(-\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu)]\partial^\mu\phi^0\}\\ &- i\{[\partial^\mu\phi^-(\tfrac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu) + \tfrac{1}{\sqrt{2}}g\partial^\mu\phi^{0*}W_\mu^-]\phi^+ + [\tfrac{1}{\sqrt{2}}g\partial^\mu\phi^-W_\mu^+ + \partial^\mu\phi^{0*}(-\frac{1}{2}gW_\mu^3 + g'YB_\mu)]\phi^0\end{aligned} \tag{3.200}$$

Las interacciones neutras de tres campos corresponden a

$$\mathcal{L}_{\text{nc}} = i\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left(\frac{g}{2}W^3_\mu+g'Y_\Phi B_\mu\right)+i\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]\left(-\frac{g}{2}W^3_\mu+g'Y_\Phi B_\mu\right) \tag{3.201}$$

Como el fotón no se acopla con partículas neutras definimos

$$\begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \tag{3.202}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{nc}} =& i\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left[\frac{g}{2}(\cos\theta_W Z_\mu+\sin\theta_W A_\mu)+g'Y_\Phi(-\sin\theta_W Z_\mu+\cos\theta_W A_\mu)\right]\\
&+i\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]\left[-\frac{g}{2}(\cos\theta_W Z_\mu+\sin\theta_W A_\mu)+g'Y_\Phi(-\sin\theta_W Z_\mu+\cos\theta_W A_\mu)\right]\\
=& i\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left[(\tfrac{1}{2}g\cos\theta_W-g'Y_\Phi\sin\theta_W)Z_\mu+(\tfrac{1}{2}g\sin\theta_W+g'Y_\Phi\cos\theta_W)A_\mu\right]\\
&+i\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]\left[(-\tfrac{1}{2}g\cos\theta_W-g'Y_\Phi\sin\theta_W)Z_\mu+(-\tfrac{1}{2}g\sin\theta_W+g'Y_\Phi\cos\theta_W)A_\mu\right]
\end{aligned} \tag{3.203}$$

Comparando con el Lagragiano para la interacción electromagnética en la ec. (3.89) ($g=e$)

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} \supset ie(\phi^-\partial^\mu\phi^+-\phi^+\partial^\mu\phi^-)A_\mu \tag{3.204}$$

Tenemos las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g\sin\theta_W+Y_\Phi g'\cos\theta_W&=e\\
-\tfrac{1}{2}g\sin\theta_W+Y_\Phi g'\cos\theta_W&=0
\end{aligned} \tag{3.205}$$

Con solución

$$g\sin\theta_W=e \qquad\qquad 2Y_\Phi g'\cos\theta_W=e \tag{3.206}$$

Fijando

$$Y_\Phi=\frac{1}{2} \tag{3.207}$$

tenemos

$$g\sin\theta_W=g'\cos\theta_W=e \tag{3.208}$$

sustituyendo en (3.205) y teniendo en cuenta la ec. (3.193)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+Y_\Phi&=+1\\
-\frac{1}{2}+Y_\Phi&=0\\
T_3+Y_\Phi&=Q
\end{aligned} \tag{3.209}$$

Podemos escribir el operador de carga en términos del isospín y la hipercarga, relación que se conoce como la fórmula de Gell-man-Nishijima

$$\hat{Q}=T_3+Y \tag{3.210}$$

Reemplazando la ec. (3.208) en ec. (3.203)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{nc}} =& ie\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left[\frac{1}{2}+Y_\Phi\right]A_\mu\\
&+ie\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left[\frac{\cos\theta_W}{2\sin\theta_W}-\frac{Y_\Phi\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\right]Z_\mu\\
&-ie\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]\left[\frac{\cos\theta_W}{2\sin\theta_W}+\frac{Y_\Phi\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\right]Z_\mu
\end{aligned}
\tag{3.211}
$$

Usando $Y_\Phi = 1/2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{nc}} =& ie\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]A_\mu\\
&+i\frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left(\cos^2\theta_W-\sin^2\theta_W\right)Z_\mu\\
&-i\frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]Z_\mu\\
=& ie\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]A_\mu\\
&+i\frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right]\left(1-2\sin^2\theta_W\right)Z_\mu\\
&-i\frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]Z_\mu\\
=& eJ^\mu_{\text{EM}}A_\mu+\frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W}J^\mu_{NC}Z_\mu
\end{aligned}
\tag{3.212}
$$

donde J^μ_{EM} está dado por la ec. (3.51)

$$
J^\mu_{\text{EM}} = i(\phi^-\partial^\mu\phi^+-\phi^+\partial^\mu\phi^-)\,. \tag{3.213}
$$

y

$$
J^\mu_{\text{NC}} = i\left[\phi^-\left(\partial^\mu\phi^+\right)-\left(\partial^\mu\phi^-\right)\phi^+\right](1-2\sin^2\theta_W)-i\left[\left(\partial^\mu\phi^0\right)\phi^{0*}-\left(\partial^\mu\phi^{0*}\right)\phi^0\right]. \tag{3.214}
$$

Otra forma de obtener el mismo resultado es escribiendo el Lagrangiano de forma más compacta partiendo de la ec. (3.199), cuya parte diagonal es

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\supset&\left[i\Phi^\dagger\left(g\frac{\tau^3}{2}W_3^\mu+g'Y\cdot IB^\mu\right)\partial_\mu\Phi-i\partial^\mu\Phi^\dagger\left(g\frac{\tau^3}{2}W_3^\mu+g'Y\cdot IB^\mu\right)\Phi\right]\\
\supset&\left[i\Phi^\dagger\left(g\frac{\tau^3}{2}W_3^\mu+g'Y\cdot IB^\mu\right)\partial_\mu\Phi+\text{h.c}\right]
\end{aligned}
\tag{3.215}
$$

Usando la ec. (3.202)

$$
\begin{aligned}
gT^3W_3^\mu+g'YB^\mu =& gT^3(\cos\theta_W Z^\mu+\sin\theta_W A^\mu)+g'Y(-\sin\theta_W Z^\mu+\cos\theta_W A^\mu)\\
=&\left(gT^3\sin\theta_W+g'Y\cos\theta_W\right)A^\mu+\left(gT^3\cos\theta_W-g'Y\sin\theta_W\right)Z^\mu
\end{aligned}
$$

Para que Lagrangiano incluya la conservación local de carga eléctrica debe contener el Lagrangiano de la ec.(3.148) (el término en e^2 se analiza en el problema 3. 6). Entonces

$$
gT^3\sin\theta_W+g'Y\cos\theta_W = eQ \tag{3.216}
$$

Esto se consigue si

$$g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W = e \qquad\qquad T^3 + Y = Q \tag{3.217}$$

de modo que

$$Y_\Phi = \frac{1}{2} \tag{3.218}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
gT^3W_3^\mu + g'YB^\mu =& eQA^\mu + e\left(T^3\frac{\cos\theta_W}{\sin\theta_W} - Y\frac{\sin\theta_W}{\cos\theta_W}\right)Z^\mu\\
=& eQA^\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(T^3\cos^2\theta_W - Y\sin^2\theta_W\right)Z^\mu\\
=& eQA^\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left[T^3 - \left(T^3+Y\right)\sin^2\theta_W\right]Z^\mu\\
=& eQA^\mu + \frac{e}{\sin\theta_W\cos\theta_W}\left(T^3 - Q\sin^2\theta_W\right)Z^\mu
\end{aligned} \tag{3.219}$$

Entonces

$$\mathcal{L} \supset ie\Phi^\dagger Q\partial_\mu\Phi A^\mu + i\frac{e}{2\sin\theta_W\cos\theta_W}\Phi^\dagger\left(\tau^3 - 2Q\sin^2\theta_W\right)\partial_\mu\Phi Z^\mu + \text{h.c} \tag{3.220}$$

Expandiendo obtenemos la ec. (3.212)

$$\mathcal{L} \supset eJ^\mu_{\text{EM}}A_\mu + \frac{e}{2\sin\theta_W\cos\theta_W}J^\mu_{\text{NC}}Z_\mu \tag{3.221}$$

Teniendo en cuenta las interacciones de cuatro campos, ver ec.(3.263), tenemos

$$\mathcal{L} \supset ej^\mu_{\text{EM}}A_\mu + \frac{e}{2\sin\theta_W\cos\theta_W}J^\mu_{\text{NC}}Z_\mu \tag{3.222}$$

donde

$$j^\mu_{\text{EM}} = i(\phi^-\partial^\mu\phi^+ - \phi^+\partial^\mu\phi^-) + 2e\phi^-\phi^+A^\mu \tag{3.223}$$

que corresponde a la ec. (3.92).

A este nivel todos los campos gauge son no masivos. Note que las corrientes cargadas son las mismas que en la sección 3.5.

3.7. Φ como un triplete de $SU(2)$

Si Φ transforma como un triplete de $SU(2)$[3]

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi^{++}\\ \phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} \tag{3.224}$$

[3] Φ también puede escribirse como una matriz 2×2.

siendo ϕ_i campos complejos, el Lagrangiano en la ec. (3.141) queda invariante bajo las transformación gauge local

$$\Phi \to \Phi' = X\Phi = \exp(i\Sigma^i\theta_i)\Phi \tag{3.225}$$

donde Σ_i son la matrices 3×3 generadores de $SU(2)$ en la representación adjunta

$$(\Sigma_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \tag{3.226}$$

Debemos comprobar que

$$\begin{aligned}[\Sigma_i, \Sigma_j] &= i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \\ [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm}\end{aligned} \tag{3.227}$$

Ya que

$$\begin{aligned}(\Sigma_i\Sigma_j)_{lm} = (\Sigma_i)_{lk}(\Sigma_j)_{km} = -\epsilon_{ilk}\epsilon_{jkm} = \epsilon_{ilk}\epsilon_{jmk} = \delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj} \\ -(\Sigma_j\Sigma_i)_{lm} = -(\Sigma_j)_{lk}(\Sigma_i)_{km} = \epsilon_{jlk}\epsilon_{ikm} = -\epsilon_{jlk}\epsilon_{imk} = -\delta_{ji}\delta_{lm} + \delta_{jm}\delta_{li}\end{aligned} \tag{3.228}$$

Entonces

$$\begin{aligned}[\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} =& (\Sigma_i\Sigma_j - \Sigma_j\Sigma_i)_{lm} \\ =& \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ =& \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} \\ =& i\epsilon_{ijk}(-i\epsilon_{klm}) \\ =& i\epsilon_{ijk}(\Sigma_k)_{lm}\end{aligned} \tag{3.229}$$

Algunas propiedades de Σ son

$$\begin{aligned}&[(\Sigma_i)_{jk}]^\dagger = [(\Sigma_i)_{kj}]^* = (-i\epsilon_{ikj})^* = i\epsilon_{ikj} = -i\epsilon_{ijk} = (\Sigma_i)_{jk} \\ &\to \Sigma_i^\dagger = \Sigma_i\end{aligned} \tag{3.230}$$

$$\operatorname{Tr}\Sigma_i = \sum_j (\Sigma_i)_{jj} = \sum_j i\epsilon_{ijj} = 0 \tag{3.231}$$

Por lo que Σ_i es una representación del grupo $SU(2)$ en términos de matrices 3×3. Usando la ec. (3.228)

$$\operatorname{Tr}(\Sigma_i\Sigma_j) = \sum_k (\Sigma_i\Sigma_j)_{kk} = \sum_k (\delta_{ij}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{jk}) = 3\delta_{ij} - \delta_{ij} = 2\delta_{ij} \tag{3.232}$$

Expandiendo la ec. (3.225), obtenemos el resultado de la ec. (3.166)

$$\begin{aligned}&\delta\Phi \approx i\Sigma_i\theta^i\Phi \\ &\delta\phi^i \approx (i\Sigma_k\theta^k\Phi)^i = i(\Sigma_k)_{ij}\phi^j\theta^k = i(-i\epsilon_{kij})\phi^j\theta^k = \epsilon_{ijk}\phi^j\theta^k = -(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\phi})^i \\ &\delta\boldsymbol{\phi} \approx -\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{\phi}\end{aligned} \tag{3.233}$$

Esto corresponde a una rotación en el espacio de tres dimensiones de isospín. $|\boldsymbol{\theta}|$ corresponde al ángulo de rotación, y $\boldsymbol{\theta}/|\boldsymbol{\theta}|$ es el eje de rotación [23]. El carácter no Abeliano del grupo proviene del hecho de que el producto vectorial en el espacio de isospín es no conmutativo.

Bajo la transformación (3.225) o su versión infinitesimal anterior el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi. \tag{3.234}$$

es invariante gauge local, donde

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - igW^\mu = \partial^\mu - ig\Sigma^i W_i^\mu$$

y

$$\begin{aligned} W^\mu =& \Sigma^i W_i^\mu \\ (W^\mu)_{jk} =& -i\epsilon_{ijk}W_i^\mu \end{aligned} \tag{3.235}$$

y sólo contiene entradas no diagonales.

$$(W^\mu)_{12} = - i\epsilon_{312}W_3^\mu = -iW_3^\mu \tag{3.236}$$

La ec. (3.171) se mantiene igual

$$\begin{aligned} \delta W'^\mu_i \approx& \frac{1}{g}\partial^\mu\theta_i + \epsilon^{ijk}W_j^\mu\theta_k \\ \delta \mathbf{W}'^\mu \approx& \frac{1}{g}\partial^\mu\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W}^\mu \times \boldsymbol{\theta} \end{aligned} \tag{3.237}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\mu\Phi &= (\partial^\mu - ig\Sigma^i W_i^\mu)\Phi \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= (\delta_{jk}\partial^\mu - ig(\Sigma^i)_{jk}W_i^\mu)\phi_k \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= (\delta_{jk}\partial^\mu - g\epsilon_{ijk}W_i^\mu)\phi_k \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= (\delta_{jk}\partial^\mu + g\epsilon_{jik}W_i^\mu)\phi_k \\ (\mathcal{D}^\mu)_{jk}\phi_k &= \delta_{jk}\partial^\mu\phi_k + g(\mathbf{W}^\mu \times \boldsymbol{\phi})_j \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{D}^\mu\boldsymbol{\phi} = \partial^\mu\boldsymbol{\phi} + g\mathbf{W}^\mu \times \boldsymbol{\phi} \tag{3.238}$$

Además

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger &= \Phi^\dagger(\partial^\mu + ig\Sigma^i W_i^\mu) \\ [(\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger]_j &= (\delta_{jk}\partial^\mu\phi_k^* + g\epsilon_{ijk}\phi_k^* W_i^\mu) \\ [(\mathcal{D}^\mu\Phi)^\dagger]_j &= (\delta_{jk}\partial^\mu\phi_k^* + g\epsilon_{jki}\phi_k^* W_i^\mu) \end{aligned} \tag{3.239}$$

$$(\mathcal{D}^\mu\boldsymbol{\phi})^\dagger = \partial^\mu\boldsymbol{\phi}^* + g\boldsymbol{\phi}^* \times \mathbf{W}^\mu \tag{3.240}$$

La definición de $W^{\mu\nu}$ queda

$$W^{\mu\nu} = \Sigma^i W_i^{\mu\nu} \tag{3.241}$$

con $W_i^{\mu\nu}$ dado por la ec. (3.175)

$$\mathbf{W}^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathbf{W}^\nu - \partial^\nu \mathbf{W}^\nu + g\mathbf{W}^\mu \times \mathbf{W}^\nu \tag{3.242}$$

Sin embargo, debido a la ec. (3.232)

$$-\frac{1}{8}\operatorname{Tr}(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu} \tag{3.243}$$

De acuerdo a la ec. (3.176), $W^{\mu\nu}$ transforma como

$$\begin{aligned}
W^{\mu\nu} \to (W^{\mu\nu})' &= XW^{\mu\nu}X^\dagger\\
&\approx (1 + i\Sigma^j\theta_j)W^{\mu\nu}(1 - i\Sigma^k\theta_k)\\
&\approx W^{\mu\nu} + i\theta_j\Sigma^jW^{\mu\nu} - i\theta_jW^{\mu\nu}\Sigma^j
\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\Sigma^iW_i^{\mu\nu} \to (W^{\mu\nu})' &= \Sigma^iW_i^{\mu\nu} + i\theta_j\Sigma^j\Sigma^iW_i^{\mu\nu} - i\theta_j\Sigma^iW_i^{\mu\nu}\Sigma^j\\
&= (\Sigma^i + i\theta_j\Sigma^j\Sigma^i - i\theta_j\Sigma^i\Sigma^j)W_i^{\mu\nu}\\
&= (\Sigma^i - i\theta_j[\Sigma^i,\Sigma^j])W_i^{\mu\nu}\\
&= (\Sigma^i - i\theta_j(i\epsilon_{ijk}\Sigma^k))W_i^{\mu\nu}\\
&= \Sigma^iW_i^{\mu\nu} + \theta_j\epsilon_{ijk}\Sigma^kW_i^{\mu\nu}\\
&= \Sigma^iW_i^{\mu\nu} + \Sigma^i\theta_j\epsilon_{kji}W_k^{\mu\nu}\\
&= \Sigma^iW_i^{\mu\nu} - \Sigma^i\theta_j\epsilon_{jki}W_k^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

entonces

$$\delta(\mathbf{W}^{\mu\nu}) = -\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{W}^{\mu\nu} \tag{3.244}$$

y $\mathbf{W}^{\mu\nu}$ transforma como el campo $\boldsymbol{\phi}$.

El Lagrangiano invariante gauge local es entonces, a partir de la ec. (3.180) que sigue siendo válida si tenemos en cuanta la nueva traza en ec. (3.243)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} =&\partial^\mu\Phi^\dagger\partial_\mu\Phi + ig\left(\Phi^\dagger W_\mu\partial^\mu\Phi - \left(\partial^\mu\Phi^\dagger\right)W_\mu\Phi\right) + g^2\Phi^\dagger W^\mu W_\mu\Phi - m^2\Phi^\dagger\Phi - \tfrac{1}{8}\operatorname{Tr}\left(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}\right)\\
=&\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i + ig\left[\phi^{*i}(\Sigma_k)_{ij}W^k_\mu\partial^\mu\phi_j - \left(\partial^\mu\phi^{*i}\right)(\Sigma_k)_{ij}W^k_\mu\phi_j\right]\\
&+ g^2\phi^{*i}(\Sigma_k)_{ij}(\Sigma_l)_{jm}W_k^\mu W^l_\mu\phi_m - m^2\phi^*{}_i\phi^i - \tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu}\\
=&\partial^\mu\boldsymbol{\phi}^*\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\phi} + g\left[\phi^{*i}\epsilon_{kij}W^k_\mu\partial^\mu\phi_j - \left(\partial^\mu\phi^{*i}\right)\epsilon_{kij}W^k_\mu\phi_j\right]\\
&- g^2\phi^{*i}\epsilon_{kij}\epsilon_{ljm}W_k^\mu W^l_\mu\phi_m - m^2\boldsymbol{\phi}^*\cdot\boldsymbol{\phi} - \tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu}\\
=&\partial^\mu\boldsymbol{\phi}^*\cdot\partial_\mu\boldsymbol{\phi} - g\left[\phi^{*i}\epsilon_{ikj}W^k_\mu\partial^\mu\phi_j - \left(\partial^\mu\phi^{*i}\right)\epsilon_{ikj}W^k_\mu\phi_j\right]\\
&+ g^2\phi^{*i}\epsilon_{kij}\epsilon_{lmj}W_k^\mu W^l_\mu\phi_m - m^2\boldsymbol{\phi}^*\cdot\boldsymbol{\phi} - \tfrac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.245}$$

donde

$$\begin{aligned}
W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu} =&(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu + g\,\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu)(\partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + g\,\epsilon_{ilm}W^l_\mu W^m_\nu)\\
=&(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu)(\partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu)\\
&+ g[\epsilon_{ilm}(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\nu)W^l_\mu W^m_\nu + \epsilon_{ijk}(\partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu)W_j^\mu W_k^\nu]\\
&+ g^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W^l_\mu W^m_\nu\\
=&(\partial^\mu W_i^\nu - \partial^\nu W_i^\mu)(\partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu) + 2g\epsilon_{ijk}(\partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu)W_j^\mu W_k^\nu\\
&+ g^2\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}W_j^\mu W_k^\nu W^l_\mu W^m_\nu
\end{aligned} \tag{3.246}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}\right]-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W^i_\nu}=0 \tag{3.247}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}\right]=&-\frac{1}{4}\partial_\mu\left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu}\right]\\
=&-\partial_\mu(\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\nu)\\
&-\frac{1}{4}\partial_\mu\left\{2g\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}\left[\epsilon_{ijk}(\partial_\alpha W^i_\beta-\partial_\beta W^i_\alpha)\right]W_j^\alpha W_k^\beta\right\}\\
=&-\partial_\mu(\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\nu)\\
&-\frac{1}{4}\partial_\mu\left\{2g\left[\epsilon_{ijk}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta}-\delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})\right]W_j^\alpha W_k^\beta\right\}\\
=&-\partial_\mu(\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\nu)-\frac{1}{4}\partial_\mu\left\{2g\left(\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu-\epsilon_{ijk}W_j^\nu W_k^\mu\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}\right]=&-\partial_\mu(\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\nu)-\frac{1}{4}\partial_\mu\left\{2g\left(\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu-\epsilon_{ikj}W_k^\nu W_j^\mu\right)\right\}\\
=&-\partial_\mu(\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\nu)-\frac{1}{4}\partial_\mu\left\{2g\left(\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu+\epsilon_{ijk}W_k^\nu W_j^\mu\right)\right\}\\
=&-\partial_\mu(\partial^\mu W_i^\nu-\partial^\nu W_i^\nu)-\partial_\mu\left(g\epsilon_{ijk}W_j^\mu W_k^\nu\right)\\
=&-\partial_\mu\left[(\partial^\mu\mathbf{W}^\nu-\partial^\nu\mathbf{W}^\nu)+g\mathbf{W}^\mu\times\mathbf{W}^\nu\right]_i
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}\right]=-\partial_\mu W_i^{\mu\nu}=-\partial_\mu(\mathbf{W}^{\mu\nu})_i \tag{3.248}$$

De manera que al igual que en el caso Abeliano

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu W^i_\nu)}W_i^{\mu\nu}W^i_{\mu\nu}=4W_i^{\mu\nu} \tag{3.249}$$

De otro lado, usando la técnica, por ejemplo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial W^i_\nu}\left[\epsilon_{ilm}(\partial^\mu W_i^\nu)W^l_\mu W^m_\nu\right]=&\frac{\partial}{\partial W^i_\nu}\left[\epsilon_{ilm}(\partial^\nu W_i^\mu)W^l_\nu W^m_\mu\right]\\
=&\epsilon_{nim}(\partial^\nu W_n^\mu)\left[\frac{\partial W^i_\nu}{\partial W^i_\nu}\right]W^m_\mu+\epsilon_{nli}(\partial^\mu W_n^\nu)W^l_\mu\left[\frac{\partial W^i_\nu}{\partial W^i_\nu}\right]\\
=&\epsilon_{nim}(\partial^\nu W_n^\mu)W^m_\mu+\epsilon_{nli}(\partial^\mu W_n^\nu)W^l_\mu
\end{aligned} \tag{3.250}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W^i_\nu}=&g\left[\phi^{*n}\epsilon_{nij}\partial^\nu\phi_j-\left(\partial^\nu\phi^{*n}\right)\epsilon_{nij}\phi_j\right]-g^2(\phi^{*n}\epsilon_{inj}\epsilon_{lmj}W_l^\nu\phi_m+\phi^{*n}\epsilon_{knj}\epsilon_{imj}W_k^\nu\phi_m)\\
&+\frac{2g}{4}[\epsilon_{nji}(\partial^\mu W_n^\nu-\partial^\nu W_n^\mu)W^j_\mu+\epsilon_{nik}(\partial^\nu W_n^\mu-\partial^\mu W_n^\nu)W^k_\mu]\\
&+\frac{g^2}{4}(\epsilon_{nik}\epsilon_{nlm}W_k^\mu W_l^\nu W^m_\mu+\epsilon_{nji}\epsilon_{nlm}W_j^\mu W^l_\mu W^\nu_m+\epsilon_{njk}\epsilon_{nim}W_j^\nu W_k^\mu W^m_\mu+\epsilon_{njk}\epsilon_{nli}W_j^\mu W_k^\nu W^l_\mu)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} =& -g\left[\epsilon_{nji}\phi^{*n}\partial^\nu\phi_j-\epsilon_{nji}\left(\partial^\nu\phi^{*n}\right)\phi_j\right]-g^2[\phi^{*n}\epsilon_{inj}(\epsilon_{lmj}W_l^\nu\phi_m)+\phi_m\epsilon_{imj}(\epsilon_{knj}W_k^\nu\phi^{*n})]\\
&+\frac{2g}{4}[\epsilon_{nji}(\partial^\mu W_n^\nu-\partial^\nu W_n^\mu)W_\mu^j-\epsilon_{nik}(\partial^\mu W_n^\nu-\partial^\nu W_n^\mu)W_\mu^k]\\
&+\frac{g^2}{4}(\epsilon_{nik}\epsilon_{nlm}W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m+\epsilon_{nki}\epsilon_{nml}W_k^\mu W_\mu^m W_l^\nu+\epsilon_{nlm}\epsilon_{nik}W_l^\nu W_m^\mu W_\mu^k+\epsilon_{nml}\epsilon_{nki}W_m^\mu W_l^\nu W_\mu^k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} =& -g\left[\epsilon_{nji}\phi^{*n}\partial^\nu\phi_j-\epsilon_{nji}\left(\partial^\nu\phi^{*n}\right)\phi_j\right]-g^2[\phi^{*n}\epsilon_{inj}(\epsilon_{lmj}W_l^\nu\phi_m)+\phi_m\epsilon_{imj}(\epsilon_{knj}W_k^\nu\phi^{*n})]\\
&+\frac{2g}{4}[\epsilon_{nji}(\partial^\mu W_n^\nu-\partial^\nu W_n^\mu)W_\mu^j+\epsilon_{nji}(\partial^\mu W_n^\nu-\partial^\nu W_n^\mu)W_\mu^j]+g^2\epsilon_{nik}\epsilon_{nlm}W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m\\
=& -g\left[\epsilon_{nji}\phi^{*n}\partial^\nu\phi_j-\epsilon_{nji}\left(\partial^\nu\phi^{*n}\right)\phi_j\right]-g^2[\phi^{*n}\epsilon_{inj}(\epsilon_{lmj}W_l^\nu\phi_m)+\phi_m\epsilon_{imj}(\epsilon_{knj}W_k^\nu\phi^{*n})]\\
&+g[\epsilon_{nji}(\partial^\mu W_n^\nu-\partial^\nu W_n^\mu)W_\mu^j]+g^2\epsilon_{nik}\epsilon_{nlm}W_k^\mu W_l^\nu W_\mu^m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} =& -g(\boldsymbol{\phi}^*\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*\times\boldsymbol{\phi})_i-g^2[\epsilon_{inj}\phi^{*n}(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})_j+\epsilon_{imj}\phi_m(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi}^*)_j]\\
&+g[(\partial^\mu\mathbf{W}^\nu-\partial^\nu\mathbf{W}^\mu)\times\mathbf{W}_\mu]_i+g^2\epsilon_{nik}(\mathbf{W}^\nu\times\mathbf{W}^\mu)_nW_\mu^k\\
=& -g(\boldsymbol{\phi}^*\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*\times\boldsymbol{\phi})_i+g^2[\epsilon_{ijn}(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})_j\phi^{*n}+\epsilon_{ijm}(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi}^*)_j\phi_m]\\
&+g[(\partial^\mu\mathbf{W}^\nu-\partial^\nu\mathbf{W}^\mu)\times\mathbf{W}_\mu]_i-g^2\epsilon_{nki}(\mathbf{W}^\nu\times\mathbf{W}^\mu)_nW_\mu^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} =& -g(\boldsymbol{\phi}^*\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*\times\boldsymbol{\phi})_i+g^2[(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{\phi}^*+(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi}^*)\times\boldsymbol{\phi}]_i\\
&+g[(\partial^\mu\mathbf{W}^\nu-\partial^\nu\mathbf{W}^\mu)\times\mathbf{W}_\mu]_i-g^2[(\mathbf{W}^\nu\times\mathbf{W}^\mu)\times\mathbf{W}_\mu]_i\\
=& -g\{\boldsymbol{\phi}^*\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*\times\boldsymbol{\phi}-g[(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi}^*)\times\boldsymbol{\phi}+(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{\phi}^*]\}_i\\
&-g\{[(\partial^\nu\mathbf{W}^\mu-\partial^\mu\mathbf{W}^\nu)+g\mathbf{W}^\nu\times\mathbf{W}^\mu]\times\mathbf{W}_\mu\}_i
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$
-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial W_\nu^i} = -g\{\boldsymbol{\phi}^*\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*\times\boldsymbol{\phi}-g[(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi}^*)\times\boldsymbol{\phi}+(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{\phi}^*]\}_i-g(\mathbf{W}^{\nu\mu}\times\mathbf{W}_\mu)_i \tag{3.251}
$$

Combinando las ecuaciones (3.251) y (3.248) en la ec. (3.247), tenemos

$$
\begin{aligned}
-\partial_\mu\mathbf{W}^{\mu\nu}+g\mathbf{W}^{\mu\nu}\times\mathbf{W}_\mu &= g\{\boldsymbol{\phi}^*\times\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*\times\boldsymbol{\phi}-g[(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi}^*)\times\boldsymbol{\phi}+(\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{\phi}^*]\}\\
\partial_\mu\mathbf{W}^{\mu\nu}-g\mathbf{W}^{\mu\nu}\times\mathbf{W}_\mu &= -g[\boldsymbol{\phi}^*\times(\partial^\nu\boldsymbol{\phi}+g\mathbf{W}^\nu\times\boldsymbol{\phi})-(\partial^\nu\boldsymbol{\phi}^*+g\boldsymbol{\phi}^*\times\mathbf{W}^\nu)\times\boldsymbol{\phi}]\\
\partial^\mu\mathbf{W}_{\mu\nu}+g\mathbf{W}^\mu\times\mathbf{W}_{\mu\nu} &= -g[\boldsymbol{\phi}^*\times(\partial_\nu\boldsymbol{\phi}+g\mathbf{W}_\nu\times\boldsymbol{\phi})-(\partial_\nu\boldsymbol{\phi}^*+g\boldsymbol{\phi}^*\times g\mathbf{W}_\nu)\times\boldsymbol{\phi}]
\end{aligned}
\tag{3.252}
$$

De las ecs. (3.238) y (3.240)

$$
\mathcal{D}^\mu\mathbf{W}_{\mu\nu} = -g[\boldsymbol{\phi}^*\times\mathcal{D}_\nu\boldsymbol{\phi}-(\mathcal{D}_\nu\boldsymbol{\phi})^\dagger\times\boldsymbol{\phi}]\equiv -g\,\mathbf{j}_\nu \tag{3.253}
$$

Note que si ϕ es real

$$
\mathcal{D}^\mu\mathbf{W}_{\mu\nu} = g(\mathcal{D}_\nu\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{\phi} \tag{3.254}
$$

Este caso corresponde al de una simetría $SO(3)$ [23].

Mientras que las ecuaciones de Maxwell son lineales en A^μ, las ecuaciones (3.253) es no lineal en $\mathbf{W}^\mu$. En usencia de materia ($\phi \to 0$) las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{3.255}$$

indicando que no hay término de fuente para el campo electromagnético. En el caso no Abeliano

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\mu \mathbf{W}^{\mu\nu} = -g\mathbf{W}_\mu \times W^{\mu\nu} \tag{3.256}$$

indicando que el campo $\mathbf{W}^{\mu\nu}$ actúa como la fuente de si mismo. Esto se debe a que el campo W^μ lleva carga de isospín, a diferencia del campo A^μ que no lleva carga eléctrica.

De otro lado las ecuaciones homogéneas de Maxwell dan lugar a que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$ y a la ausencia de monopolos magnéticos. En este caso se puede demostrar que

$$\mathcal{D}^\lambda \mathbf{W}^{\mu\nu} + \mathcal{D}^\nu \mathbf{W}^{\lambda\mu} + \mathcal{D}^\mu \mathbf{W}^{\nu\lambda} = 0, \tag{3.257}$$

se sigue que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} \neq 0$, donde $\vec{\mathbf{B}}$ es el *isovector de inducción magnética*. Esto da lugar a la existencia de monopolos magnéticos de isospín.

Al igual que en el caso Abeliano, sin embargo, el campo $\mathbf{W}^\mu$ sigue siendo sin masa.

Aunque la teoría que hemos desarrollado es puramente matemática, comparte muchas cosas en común con las simetrías gauge no abelianas usadas en la construcción del Modelo Estándar de las partículas elementales.

3.8. Problemas

3.1 Compruebe si es posible construir un doblete escalar donde ambas campos sean cargados respetando la invarianza $SU(2) \times U(1)_Y$. La solución es $Y = 3/2$

3.2 Demuestre que la ecuación de movimiento en ec. (3.94)

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi + ie\partial_\mu(A^\mu\phi) + ieA^\mu\partial_\mu\phi - e^2A^\mu A_\mu\phi = 0$$

puede escribirse como

$$(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}^\mu - m^2)\phi = 0 \tag{3.258}$$

es decir, partiendo de la ecuación de movimento para el campo libre con el reemplazo $\partial^\mu \to \mathcal{D}^\mu$.

3.3 A partir del Lagrangiano en ec. (3.131)

3.4 Demuestre que ${\mathcal{D}'_\mu}^n\phi' = U({\mathcal{D}_\mu}^n\phi)$

$$\begin{aligned}
{\mathcal{D}'_\mu}^n\phi' =& (U\mathcal{D}_\mu U^\dagger)^n U\phi\\
=& \underbrace{U\mathcal{D}_\mu U^\dagger U\mathcal{D}_\mu U^\dagger \ldots U\mathcal{D}_\mu U^\dagger U\mathcal{D}_\mu U^\dagger}_{n-\text{factors}} U\phi\\
=& U({\mathcal{D}_\mu}^n\phi)
\end{aligned} \tag{3.259}$$

3.5 Muestre que

a)

$$\tilde{\Phi} \equiv i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix} \tag{3.260}$$

b) el Lagrangiano (3.143) puede escribirse también como

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \tilde{\Phi}^\dagger \partial_\mu \tilde{\Phi} - m^2 \tilde{\Phi}^\dagger \tilde{\Phi} \tag{3.261}$$

De modo que Φ y $\tilde{\Phi}$ pertenecen a la misma representación de $SU(2)$[4]

c) el Lagrangiano (3.143) puede escribirse también como

$$\mathcal{L} = \epsilon_{ab} \partial^\mu \tilde{\Phi}^a \partial_\mu \Phi^b - m^2 \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a \Phi^b \tag{3.262}$$

3.6 Muestre que los términos de interacción de 4 campos en la ec.(3.198) incluyen

$$\mathcal{L} \supset e^2 \phi^- \phi^+ A^\mu A_\mu \tag{3.263}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & \Phi^\dagger (g T^i W_i^\mu + g' Y B^\mu)(g T^i W_\mu^i + g' Y B_\mu) \Phi \\
= & \Phi^\dagger [(g T^1 W_1^\mu + g T^2 W_2^\mu) + g T^3 W_3^\mu + g' Y B^\mu][(g T^1 W_\mu^1 + g T^2 W_\mu^2) + g T^3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu] \Phi \\
= & \Phi^\dagger [(g T^1 W_1^\mu + g T^2 W_2^\mu)^2 + (g T^3 W_3^\mu + g' Y B^\mu)^2 \\
& + (g T^1 W_1^\mu + g T^2 W_2^\mu)(g T^3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu) + (g T^3 W_3^\mu + g' Y B^\mu)(g T^1 W_\mu^1 + g T^2 W_\mu^2)] \Phi \\
= & \Phi^\dagger [(g T^1 W_1^\mu + g T^2 W_2^\mu)^2 + (g T^3 W_3^\mu + g' Y B^\mu)^2 \\
& + g^2 \{T^1, T^3\} W_1^\mu W_\mu^3 + g^2 \{T^2, T^3\} W_2^\mu W_\mu^3 + 2 g g' T^1 Y W_1^\mu B_\mu + 2 g g' T^2 Y W_2^\mu B_\mu] \Phi \\
= & \Phi^\dagger [(g T^1 W_1^\mu + g T^2 W_2^\mu)^2 + (g T^3 W_3^\mu + g' Y B^\mu)^2 + 2 g g' (T^1 W_1^\mu + T^2 W_2^\mu) Y B_\mu] \Phi
\end{aligned} \tag{3.264}$$

Entonces, usando la ec.(3.219)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & \Phi^\dagger (g T^3 W_3^\mu + g' Y B^\mu)^2 \Phi \\
= & \Phi^\dagger [e Q A^\mu + \frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \left(T^3 - Q \sin^2\theta_W \right) Z^\mu]^2 \Phi \\
\supset & e^2 \Phi^\dagger Q^2 \Phi A^\mu A_\mu \\
= & e^2 \Phi^\dagger Q \Phi A^\mu A_\mu \\
= & e^2 \phi^+ \phi A^\mu A_\mu
\end{aligned} \tag{3.265}$$

3.7 Muestre que el Lagrangiano en ec. (3.245) puede escribirse escalares en el espacio $SU(2)$

[4] En $SU(2)$ las representaciones $\mathbf{2}$ y $\overline{\mathbf{2}}$ son equivlantes