Euler y la mínima acción

TRICENTENARIO DEL NACIMIENTO DE LEONHARD EULER

Diego Restrepo[1]

[1]Instituto de Física
Universidad de Antioquia

Abril 23,2007

Outline

1. Motivación
2. Historia

Motivación

Leonhard Euler, Abril 15, 1707 – Septiembre 7, 1783

[...]and invented the calculus of variations including its most well-known result, the Euler-Lagrange equation.[1]

Motivación

Principio de Mínima Acción

Después de una introducción, haremos un recuento histórico de las ideas que llevaron a la formulación del Principio de Mínima Acción, el cual da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange, estableciendo la importancia que tiene en la Física Moderna.

Motivación

Principio de Mínima Acción

Después de una introducción, haremos un recuento histórico de las ideas que llevaron a la formulación del Principio de Mínima Acción, el cual da lugar a las ecuaciones de Euler-Lagrange, estableciendo la importancia que tiene en la Física Moderna.

Modelo Estándar de las partículas elementales

El principio de mínima acción cobró fuerza en el desarrollo de la Física Moderna debido a

- Su invarianza con respecto a las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial
- Su relación con las simetrías y leyes de conservación a través del teorema de Noether
- Su explicación con la formulación de la mecánica cuántica en términos de integrales de camino

Todos estos elementos son usados en la formulación de la Teoría Cuántica de Campos, que es la base del Modelo Estándar de las partículas elementales.

Un principio de acción es un método para reformular las ecuaciones de movimiento diferenciales para un sistema físico cómo una ecuación integral equivalente.

A nivel clásico

$$F = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad S = \int_{t_i}^{t_f} L dt$$

- El primer método se usa para problemas del tipo: *Un asteroide llamado Woolsthorpe, entre las órbitas de Marte y Jupiter, parece que ésta en la dirección general de la Tierra. ¿deberíamos preocuparnos?* . Newton responde la pregunta: *Qué pasará después*
- Dada la posición y velocidad inicial de un proyectil queremos saber si da en el blanco. Tanto el punto inicial y el final están definidos en el espacio. Maupertius y Euler resuelven la pregunta con su *principio abreviado de mínima acción*: *¿Comenzando desde aquí como voy allí?.*

Un principio de acción es un método para reformular las ecuaciones de movimiento diferenciales para un sistema físico cómo una ecuación integral equivalente.

A nivel clásico

$$F = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad S = \int_{t_i}^{t_f} L dt$$

- El primer método se usa para problemas del tipo: *Un asteroide llamado Woolsthorpe, entre las órbitas de Marte y Jupiter, parece que ésta en la dirección general de la Tierra. ¿deberíamos preocuparnos?* . Newton responde la pregunta: *Qué pasará después*
- Dada la posición y velocidad inicial de un proyectil queremos saber si da en el blanco. Tanto el punto inicial y el final están definidos en el espacio. Maupertius y Euler resuelven la pregunta con su *principio abreviado de mínima acción*: *¿Comenzando desde aquí como voy allí?*.

Un principio de acción es un método para reformular las ecuaciones de movimiento diferenciales para un sistema físico cómo una ecuación integral equivalente.

A nivel clásico

$$F = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad S = \int_{t_i}^{t_f} L dt$$

- El primer método se usa para problemas del tipo: *Un asteroide llamado Woolsthorpe, entre las órbitas de Marte y Jupiter, parece que ésta en la dirección general de la Tierra. ¿deberíamos preocuparnos?* . Newton responde la pregunta: *Qué pasará después*
- Dada la posición y velocidad inicial de un proyectil queremos saber si da en el blanco. Tanto el punto inicial y el final están definidos en el espacio. Maupertius y Euler resuelven la pregunta con su *principio abreviado de mínima acción*: *¿Comenzando desde aquí como voy allí?*.

Un principio de acción es un método para reformular las ecuaciones de movimiento diferenciales para un sistema físico cómo una ecuación integral equivalente.

A nivel clásico

$$F = m\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad S = \int_{t_i}^{t_f} L dt$$

- El primer método se usa para problemas del tipo: *Un asteroide llamado Woolsthorpe, entre las órbitas de Marte y Jupiter, parece que ésta en la dirección general de la Tierra. ¿deberíamos preocuparnos?* . Newton responde la pregunta: *Qué pasará después*
- Dada la posición y velocidad inicial de un proyectil queremos saber si da en el blanco. Tanto el punto inicial y el final están definidos en el espacio. Maupertius y Euler resuelven la pregunta con su *principio abreviado de mínima acción*: *¿Comenzando desde aquí como voy allí?*.

En Física de Partículas:

$$e^+ e^- \rightarrow b\,\bar{b}\,b\,\bar{b}H$$

¿Está el Higgs en los datos del detector de partículas?

Historia [2, 3]

Pierre de Fermat (1601-1665)

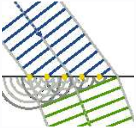
En el siglo 17 Pierre de Fermat postulo que:

Principio de mínimo tiempo o Principio de Fermat

La luz viaja entre dos puntos a los largo del camino de tiempo más corto

Pero, ¿Pero cómo sabe la luz de antemano cual será el camino más rápido?

Christiaan Huygens (1629-1695)



Su gran idea fue que la luz era una onda, y que se puede predecir a donde va la onda si se supone que cada punto en el frente de ondas actua como fuente de pequeñas ondas (wavelets).
Entonces entre el punto fuente y el punto detector los wavelets se suman en fase coherente a lo largo del camino de tiempo estacionario, y se cancelan en interferencia destructiva fuera de él.

Explicación: *La luz explora todos los caminos posibles entre la emisión y la recepción*
Augustin Fresnel en 1819, le dio a la idea una base matemática y explico los efectos de difracción en interferencia.
Feynman daría una explicación similar para el principio de mínima acción muchos siglos después.

Historia [2, 3]

Pierre de Fermat (1601-1665)

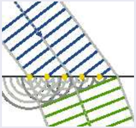
En el siglo 17 Pierre de Fermat postulo que:

Principio de mínimo tiempo o Principio de Fermat

La luz viaja entre dos puntos a los largo del camino de tiempo más corto

Pero, ¿Pero cómo sabe la luz de antemano cual será el camino más rápido?

Christiaan Huygens (1629-1695)



Su gran idea fue que la luz era una onda, y que se puede predecir a donde va la onda si se supone que cada punto en el frente de ondas actua como fuente de pequeñas ondas (wavelets).
Entonces entre el punto fuente y el punto detector los wavelets se suman en fase coherente a lo largo del camino de tiempo estacionario, y se cancelan en interferencia destructiva fuera de él.

Explicación: *La luz explora todos los caminos posibles entre la emisión y la recepción*
Augustin Fresnel en 1819, le dio a la idea una base matemática y explico los efectos de difracción en interferencia.
Feynman daría una explicación similar para el principio de mínima acción muchos siglos después.

Pierre–Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759)

En su artículo titulado:*Las leyes del movimiento y reposo deducidas desde los atributos de Dios*, estableció:

Principio de Mínima Acción. Primera formulación, 1744

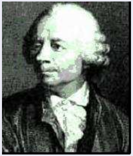
Aquí entonces es este principio, tan sabio, tan digno del Ser Supremo: *Donde sea que cualquier cambio tome lugar en la naturaleza, la cantidad de acción gastada en el cambio es siempre la más pequeña posible*

Acción

Producto de la duración del movimiento dentro un sistema por la "vis viva", el doble de lo que ahora llamamos la energía cinética del sistema

Leonhard Euler (1707-1783)

Estableció que sin la ley de conservación de la energía la cantidad de acción de Maupertius pierde todo su significado. Él limpio éste, formulando el principio de mínima acción cómo un teorema dinámico exacto y dio a su acción una forma matemática correcta:

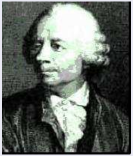


Acción

$$S = \int_{s_i}^{s_f} mv\, ds$$

Leonhard Euler (1707-1783)

Estableció que sin la ley de conservación de la energía la cantidad de acción de Maupertius pierde todo su significado. Él limpio éste, formulando el principio de mínima acción cómo un teorema dinámico exacto y dio a su acción una forma matemática correcta:



Acción

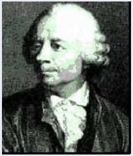
$$S = \int_{s_i}^{s_f} mv\, ds$$

Principio de Mínima Acción. Segunda formulación, 1744. Euler–Maupertius

La curva que describe un proyectil de masa m, con velocidad v mientras se mueve una distancia ds, (de todas la curvas que conectan los mismos puntos finales) es la que minimiza la acción.

Leonhard Euler (1707-1783)

Estableció que sin la ley de conservación de la energía la cantidad de acción de Maupertius pierde todo su significado. Él limpio éste, formulando el principio de mínima acción cómo un teorema dinámico exacto y dio a su acción una forma matemática correcta:



Acción

$$S = \int_{s_i}^{s_f} mv\, ds$$

Principio de Mínima Acción. Segunda formulación, 1744. Euler–Maupertius

La curva que describe un proyectil de masa m, con velocidad v mientras se mueve una distancia ds, (de todas la curvas que conectan los mismos puntos finales) es la que minimiza la acción.

En términos modernos, la acción definida por Euler, se conoce como la acción reducida:

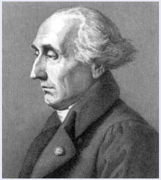
$$S = \int_{q_i}^{q_f} p\, dq = \int_{t_i}^{t_f} m\frac{dq}{dt}\frac{dq}{dt}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} mv^2 dt = \int_{t_i}^{t_f} 2K\, dt$$

donde K, es la energía cinética.

Euler también desarrollo un método geométrico para encontrar la trayectoria que minimiza la acción bastante simple e intuitivo, perfecto para ser implementado en computadores modernos [3]. Con esté método logró deducir lo que hoy se conoce como las ecuaciones de Euler–Lagrange

Joseph Lagrange (1736-1813)

Escribió una carta a Euler sobre una elegante forma matemática para expresar las condiciones de mínima acción. Sus ideas hicieron que Euler olvidará su método gráfico intuitivo.



Euler llamó al método de Lagrange *Cálculo de Variaciones*.

Algo que fue muy bueno para las matemáticas y la física teórica, pero un desastre para la educación en Física.

El método de Lagrange ha dominado las clases avanzadas de mecánica, mientras que el principio de mínima acción ha desaparecido de las clases de Física General.

Excepto por un hermoso capítulo de las "Physics Lectures" de Feynman.
Para una formulación del principio de mínima basada en el método geométrico de Euler ver [3]

William Rowan Hamilton (1736-1813)

Unificó el principio de Fermat con el principio de mínima acción de Maupertius-Euler al definir la cantidad a minimizar en todos los casos:
Si definimos el Lagrangiano como:

$$L = K - V$$

donde K Energía Cinética del sistema, y V la Energía Potencial del sistema
(o en general como la transformada de Legendre del Hamiltoniano del sistema), entonces

Acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L \, dt \tag{1}$$

Principio de mínima acción, 1760. Principio de Hamilton

Una línea de mundo (el camino verdadero entre lugares y tiempos fijos) en el espacio tiempo entre eventos iniciales y finales es una evolución del sistema para la cual la acción S es estacionaria (mínima, máxima o un punto de inflexión).

William Rowan Hamilton (1736-1813)

Unificó el principio de Fermat con el principio de mínima acción de Maupertius-Euler al definir la cantidad a minimizar en todos los casos:
Si definimos el Lagrangiano como:

$$L = K - V$$

donde K Energía Cinética del sistema, y V la Energía Potencial del sistema (o en general como la transformada de Legendre del Hamiltoniano del sistema), entonces

Acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L\, dt \tag{1}$$

Principio de mínima acción, 1760. Principio de Hamilton

Una línea de mundo (el camino verdadero entre lugares y tiempos fijos) en el espacio tiempo entre eventos iniciales y finales es una evolución del sistema para la cual la acción S es estacionaria (mínima, máxima o un punto de inflexión).

William Rowan Hamilton (1736-1813)

Unificó el principio de Fermat con el principio de mínima acción de Maupertius-Euler al definir la cantidad a minimizar en todos los casos:
Si definimos el Lagrangiano como:

$$L = K - V$$

donde K Energía Cinética del sistema, y V la Energía Potencial del sistema (o en general como la transformada de Legendre del Hamiltoniano del sistema), entonces

Acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L\, dt \qquad (1)$$

Principio de mínima acción, 1760. Principio de Hamilton

Una línea de mundo (el camino verdadero entre lugares y tiempos fijos) en el espacio tiempo entre eventos iniciales y finales es una evolución del sistema para la cual la acción S es estacionaria (mínima, máxima o un punto de inflexión).

William Rowan Hamilton (1736-1813)

Unificó el principio de Fermat con el principio de mínima acción de Maupertius-Euler al definir la cantidad a minimizar en todos los casos:
Si definimos el Lagrangiano como:

$$L = K - V$$

donde K Energía Cinética del sistema, y V la Energía Potencial del sistema (o en general como la transformada de Legendre del Hamiltoniano del sistema), entonces

Acción

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L\, dt \tag{1}$$

Principio de mínima acción, 1760. Principio de Hamilton

Una línea de mundo (el camino verdadero entre lugares y tiempos fijos) en el espacio tiempo entre eventos iniciales y finales es una evolución del sistema para la cual la acción S es estacionaria (mínima, máxima o un punto de inflexión).

Este principio de lugar a ecuaciones diferenciales que describen la línea de mundo, las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2}$$

Para campos, por ejemplo ϕ, es conveniente usar la densidad Lagrangiana

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

Acción

$$S = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{L}\, d^4x \tag{3}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{\mu=0}^{4} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{4}$$

$x^\mu = (t, x, y, z)$ $\mu = 0, 1, 2, 3$

Para campos, por ejemplo ϕ, es conveniente usar la densidad Lagrangiana

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

Acción

$$S = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{L}\, d^4x \tag{3}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{\mu=0}^{4} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\right)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{4}$$

$x^\mu = (t, x, y, z)$ $\qquad$ $\mu = 0, 1, 2, 3$

Para campos, por ejemplo ϕ, es conveniente usar la densidad Lagrangiana

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

Acción

$$S = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{L}\, d^4x \tag{3}$$

Ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{\mu=0}^{4} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\mathcal{L}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\right)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \tag{4}$$

$x^\mu = (t, x, y, z)$ $\qquad\qquad$ $\mu = 0, 1, 2, 3$

- En general las ecuaciones de *Euler-Lagrange*, constituyen la fórmula más importante del *cálculo de variaciones*.
- Dan un método para encontrar la función, f, que da el extremo de un *funcional* de costo [4]:
  Sea el funcional
  $$J[f(t)] = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$
  donde f es la función del parámetro t que extremiza el funcional.
  Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es:
  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$
- En conjunción con el principio de mínima acción se usa para calcular trayectorias (líneas de mundo).
- El resultado análogo del cálculo es que para una función continua la derivada en sus puntos extremales (mínimo, máximo, o inflexión) es cero

- En general las ecuaciones de *Euler-Lagrange*, constituyen la fórmula más importante del *cálculo de variaciones*.
- Dan un método para encontrar la función, f, que da el extremo de un *funcional* de costo [4]:
  Sea el funcional
  $$J[f(t)] = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$
  donde f es la función del parámetro t que extremiza el funcional.
  Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es:
  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$
- En conjunción con el principio de mínima acción se usa para calcular trayectorias (líneas de mundo).
- El resultado análogo del cálculo es que para una función continua la derivada en sus puntos extremales (mínimo, máximo, o inflexión) es cero

- En general las ecuaciones de *Euler-Lagrange*, constituyen la fórmula más importante del *cálculo de variaciones*.
- Dan un método para encontrar la función, f, que da el extremo de un *funcional* de costo [4]:
  Sea el funcional
  $$J[f(t)] = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$
  donde f es la función del parámetro t que extremiza el funcional.
  Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es:
  $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$
- En conjunción con el principio de mínima acción se usa para calcular trayectorias (líneas de mundo).
- El resultado análogo del cálculo es que para una función continua la derivada en sus puntos extremales (mínimo, máximo, o inflexión) es cero

- En general las ecuaciones de *Euler-Lagrange*, constituyen la fórmula más importante del *cálculo de variaciones*.
- Dan un método para encontrar la función, f, que da el extremo de un *funcional* de costo [4]:
  Sea el funcional

$$J[f(t)] = \int_a^b F(t, f(t), f'(t))\, dt$$

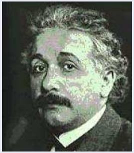
  donde f es la función del parámetro t que extremiza el funcional.
  Entonces la ecuación de Euler-Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial f'}\right) - \frac{\partial F}{\partial f} = 0$$

- En conjunción con el principio de mínima acción se usa para calcular trayectorias (líneas de mundo).
- El resultado análogo del cálculo es que para una función continua la derivada en sus puntos extremales (mínimo, máximo, o inflexión) es cero

Albert Einstein (1879-1955)

La acción no es invariante bajo transformaciones de Galileo (traslaciones espaciales). Después de una transformación de Galileo, las dos acciones S y S' dan lugar a las misma leyes de movimiento [5].



Esta asimetría para el principio de mínima acción no es accidental, sino que resulta del hecho, sino que resultan del hecho de que las transformaciones de Galileo y las Leyes de Newton son sólo leyes de movimiento aproximadas ($v \ll c$).

En relatividad especial la acción resulta ser invariante bajo transformaciones de Lorentz (TL).

Teoría de la Relatividad

Elimina la asimetría de la acción bajo traslaciones. La invarianza de la acción bajo traslaciones espaciales, temporales y rotaciones (TL) hace de la teoría de la relatividad una teoría más bella y elegante que la teoría Newtoniana de la mecánica clásica.

Junto con el Teorema de Noether, establecen el paradigma para la construcción de nuevas teorías físicas.

Emmy Noether (1882-1935)

Simetrías

Algo es simétrico si una vez sujeto a cierta operación éste aparece exactamente igual después de la operación.

Hay dos clases de simetrías:

- Simetrías discretas (reflexiones, ...)
- Simetrías continuas (rotaciones, ...)

El teorema de Noether (publicado en 1918) deriva las leyes de conservación a partir de simetrías bajo la hipótesis de que el principio de mínima acción gobierna el movimiento de una partícula.

Teorema de Noether

- Por cada simetría continua de la acción, debe existir una ley de conservación
- Por cada ley de conservación, debe existir una simetría continua

Emmy Noether (1882-1935)

Simetrías

Algo es simétrico si una vez sujeto a cierta operación éste aparece exactamente igual después de la operación.

Hay dos clases de simetrías:

- Simetrías discretas (reflexiones, ...)
- Simetrías continuas (rotaciones, ...)

El teorema de Noether (publicado en 1918) deriva las leyes de conservación a partir de simetrías bajo la hipótesis de que el principio de mínima acción gobierna el movimiento de una partícula.

Teorema de Noether

- Por cada simetría continua de la acción, debe existir una ley de conservación
- Por cada ley de conservación, debe existir una simetría continua

Emmy Noether (1882-1935)

Simetrías

Algo es simétrico si una vez sujeto a cierta operación éste aparece exactamente igual después de la operación.

Hay dos clases de simetrías:

- Simetrías discretas (reflexiones, ...)
- Simetrías continuas (rotaciones, ...)

El teorema de Noether (publicado en 1918) deriva las leyes de conservación a partir de simetrías bajo la hipótesis de que el principio de mínima acción gobierna el movimiento de una partícula.

Teorema de Noether

- Por cada simetría continua de la acción, debe existir una ley de conservación
- Por cada ley de conservación, debe existir una simetría continua

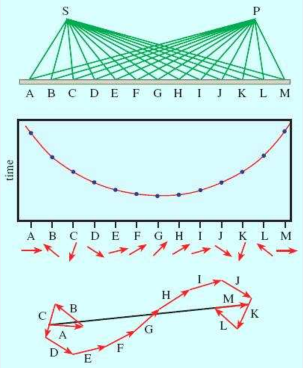
Simetría	**Ley de Conservación**
Traslación en el tiempo	Energía
Traslación en el espacio	Momentum
Rotación en el espacio	Momentum angular
Invarianza gauge local (IGL) $U(1)_Q$	Carga eléctrica
IGL bajo $SU(3)$	Carga de color
IGL bajo $SU(2)_L$	Carga de isospín débil

Richard Feynman (1918-1988)

Explore todos los caminos!

Explica la Leyes de Newton con su formulación de la mecánica cuántica basada en el principio de mínima acción.

En 1940 Richard Feynman adaptó la idea de Huygnes para hacer una nueva formulación de la mecánica cuántica, en términos de integrales de camino.



considere un reloj que rota a la frecuencia del fotón

$$w = E/\hbar$$

"$\rightarrow$" representa la mancilla de ese reloj.

La flecha debajo de cada letra en el gráfico de tiempo contra caminos, representa el tiempo al que se detuvo el reloj después de recorrer el camino de S a P pasando por el correspondiente punto.

En el tercer gráfico se muestra el resultado de adicionar todas las flechas.

La mayor contribución a la flecha final $\overline{\mathrm{AM}}$ proviene de las flechas intermedias E hasta I, cuyas direcciones son cercanamente las mismas debido a que sus tiempos de sus caminos son cercanamente los mismos. Esos coinciden con los caminos de tiempo mínimo.

Este análisis se puede extender para cualquier partícula además del fotón.
Para una partícula ordinaria, con masa, su frecuencia es:

$$w = \frac{L}{\hbar}$$

Para un electrón libre no relativista tendríamos:

$$w = \frac{K}{\hbar}$$

que es similar a la expresión anterior.
Entonces, la acción para un determinado camino, $\int L\,dt$ nos da el número de la rotaciones de la flecha del reloj del electrón a lo largo de un determinado camino. Cada camino es determinado por el principio de mínima acción. El resultado final de sumar apropiadamente todas las contribuciones de cada acción

$$e^{iS/\hbar}$$

da como resultado la acción clásica para la partícula!.

- http://en.wikipedia.org/wiki/Euler
- http://en.wikipedia.org/wiki/Principle_of_least_action
- http://www.eftaylor.com/leastaction.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Euler-Lagrange
- J. Hanc, S. Tuleja, M. Hancova, "Symmetries and conservation lawas: Consequences of Noether's theorem", Am. J. Phys. **72** (4), 2004.