
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUTO DE FÍSICA



TEORÍA DE LA POTENCIA DE FRENADO DE
BOHR Y SU MODIFICACIÓN

POR

ANDRÉS ARBEY OCHOA ROJAS

ASESOR: HUACHUAN WU

M.Sc. TESIS

MEDELLÍN, ANTIOQUIA

DICIEMBRE 2012

Teoría de la Potencia de Frenado de Bohr y su Modificación

Andrés Arbey Ochoa Rojas

Con amor: lo dedico a mi familia y a Diana por tanto aguante.

Agradecimientos

Un agradecimiento especial al profesor Wu por toda su paciencia, ayuda y colaboración a lo largo de todos estos años. Agradezco a todos mis compañeros de oficina, Anyeres, Florez, Calambre, Simpson, Willie, Liche, por los ratos de discusión y la amistad brindada durante todo este tiempo.

Resumen

La teoría de Bohr de la potencia de frenado para partículas cargadas pesadas funciona razonablemente bien para altas energías de la partícula incidente, sin embargo, tiene una falla para energías menores que 0.1 MeV. Analizando la razón de esta falla, se propone una modificación de la teoría, introduciendo una fórmula fenomenológica. La validez de esta modificación es chequeada para varios tipos de materiales con un amplio rango de números atómicos. El acuerdo obtenido entre la teoría y el experimento es muy bueno. En un futuro, se hará la comparación con mas materiales y se buscará la interpretación de esta fórmula fenomenológica.

Índice general

1. Introducción	6
2. Teoría de Bohr de la Potencia de Frenado	9
2.1. Potencia de Frenado Colisión Dura	10
2.2. Potencia de Frenado Colisión Suave	14
2.3. Potencia de Frenado Total	19
3. Modificación de la Teoría de Bohr	21
3.1. Falla de la Teoría de Bohr a Bajas Energías	21
3.2. Modificación de la Teoría de Bohr	22
3.3. Test de la Fórmula Fenomenológica	26
3.3.1. Comparación Entre la Teoría y el Experimento	26
3.3.2. Discusión	33
4. Conclusiones	35
Bibliografía	38

Capítulo 1

Introducción

A comienzos del siglo pasado Marie Curie [1] descubrió que las partículas α y β son frenadas en la materia mientras que las γ son absorbidas. Rutherford, Thomson y muchos otros desarrollaron estudios pioneros sobre los procesos de frenado. Bohr en su artículo ‘On the Theory of the Decrease of Moving Electrified Particles on Passing Throguh Matter’ [2] invento una teoría que influenció todos los desarrollos que siguieron. Bohr llegó a las predicciones de potencia de frenado y rangos medios usando mecánica clásica y después incluyó algunas correcciones relativistas. El asumió que los electrones en el medio absorbente, o sea el medio en el cual viajan los electrones, estaban ligados armónicamente. Esta teoría permitió comparar los rangos teóricos con los rangos medidos en la cámara de niebla. Aunque la teoría de Bohr no concuerda exactamente con el experimento, es una buena aproximación para calcular la potencia de frenado y es el punto de partida de todos los desarrollos posteriores. En 1930 Bethe publicó su artículo ‘Theory of the passage of Fast Corpuscular Rays Throgh Matter ’ [3], donde realizó el tratamiento cuántico para calcular la potencia de frenado. El acuerdo de esta teoría con el experimento es excelente para energías medias y altas, pero a bajas energías no hay una buena concordancia. Despues se introdujo la corrección relativista de la fórmula de Bethe, esta corrección no aporta un porcentaje muy alto de precisión y solo es notable para altas energías. Bethe, Bloch y Møller [3, 4, 5] establecieron la teoría cuántica de la potencia de frenado para iones y electrones sobre la base de los conceptos de Bohr y la teoría de perturbación de Born. El tratamiento de Fermi de los efectos de polarización y las consideraciones de Bohr sobre el frenado de los fragmentos de fisión influenciaron los desarrollos posteriores de la teoría. En 1948 Bohr escribió un tratado sobre

la interacción de partículas cargadas con la materia, se llamó ‘The Penetration of Atomic Particles Through Matter’ [6], donde explica los avances de la teoría hasta ese momento y compara la formulación cuántica con la clásica. Investigaciones experimentales fueron impulsadas después de la segunda guerra mundial debido a nuevos instrumentos como aceleradores, detectores, técnicas de vacío y un creciente espectro de aplicaciones en ciencia y tecnología. En 1963 Fano publicó un review sobre el tema, se llamó ‘Penetration of Protons, Alpha Particles and Mesons’ [7], en el se calcula detalladamente la potencia de frenado para partículas pesadas a partir de la aproximación de Born, además se explican las correcciones relativistas, de capas y de polarización del medio. Otras correcciones para bajas energías se introdujeron años después, algunas a partir de primeros principios y otras de forma empírica. Después de este artículo se han publicado muchos más a través de los años, en ellos se explican las teorías de Bohr y de Bethe, las principales correcciones de dichas teorías y los resultados experimentales y teóricos obtenidos hasta el momento en que se escriben dichas publicaciones [8, 9].

A través de los años la teoría de la penetración de las partículas cargadas en la materia ha sido objeto de interés continuo. Este interés es debido al menos a dos razones principales: el deseo de calcular los principales parámetros de la teoría a partir de primeros principios y la necesidad de comprensión de los procesos de penetración de las partículas cargadas en la materia, debido a su rol en muchos experimentos de física de altas energías, medicina nuclear, dosimetría de la radiación etc.

Hay un incremento en el interés del uso médico de haces de protones debido a que estos muestran una mayor deposición de energía a medida que aumenta la distancia de penetración, esto lleva a un aumento de la dosis justo al final de su trayectoria, esta región es conocida como el pico de Bragg y es más puntiaguda mientras más masiva sea la partícula. Esta característica es una gran ventaja ya que se puede atacar tumores en una manera muy precisa y localizada, contrario a los rayos γ que producen daños en otros puntos alrededor de la ubicación del tumor. Gran parte del manejo de la radioterapia con protones se basa en la comprensión y manejo del pico de Bragg, ya que en este reside la ventaja de la terapia con protones respecto a otras partículas cargadas. Las energías de los protones usados para tratamientos con radiación se ubican entre 3 MeV y 300 MeV, conocido como el rango clínico.

Capítulo 1. Introducción

Las suposiciones de Bohr fueron el punto de partida de todas las teorías desarrolladas posteriormente, en este trabajo revisitamos la teoría de Bohr, analizamos sus problemas y buscamos modificaciones.

Capítulo 2

Teoría de Bohr de la Potencia de Frenado

En este capítulo revisitamos la teoría de Bohr. De aquí en adelante usaremos la siguiente notación para abreviar constantes y simplificar las ecuaciones: la constante de estructura fina es

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad (2.1)$$

y el radio clásico del electrón es

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \approx 2.82 \text{ fm}. \quad (2.2)$$

La transferencia de energía de partículas cargadas pesadas a un medio (que también llamaremos absorbente) ocurre principalmente a través de interacciones coulombianas de estas partículas con los electrones de los átomos del absorbente, a esto se le llama pérdida por colisión o pérdida electrónica. Las colisiones inelásticas entre las partículas pesadas y los núcleos de los átomos del absorbente es conocida como pérdida por radiación y a este tipo de interacción se le llama radiación de frenado o *bremstrahlung*. La probabilidad para este tipo de interacción es inversamente proporcional a la masa de la partícula cargada, esto hace despreciable la radiación de frenado para el protón. Para partículas pesadas como protones el ángulo de dispersión es muy pequeño, por esta razón el protón mantiene su trayectoria aproximadamente en línea recta hasta que alcanza el final de su rango. Iniciamos calculando la transferencia de energía de una partícula masiva rápida a un electrón libre.

Después consideramos los efectos de una fuerza de enlace sobre el electrón y por último se obtiene la fórmula clásica de Bohr para la pérdida de energía de una partícula cargada.

Dos tratamientos diferentes fueron desarrollados para describir la pérdida de energía de una partícula cargada pesada en su interacción con electrones atómicos: el tratamiento clásico de Bohr (1913), que está basado en el parámetro de impacto o distancia perpendicular entre la trayectoria de la partícula y el núcleo del átomo absorbente. El tratamiento cuántico de Bethe (1930), que asume que la transferencia de momento al electrón del átomo absorbente está cuantizada. Los dos tratamientos, el clásico y el cuántico, hacen las siguientes suposiciones: La partícula cargada está moviéndose en el medio absorbente mucho más rápido que la velocidad orbital de los electrones del absorbente. La partícula cargada interactúa con los átomos absorbentes solo a través de fuerzas electromagnéticas, las reacciones nucleares entre la partícula y los núcleos de los átomos del absorbente no son consideradas. La partícula cargada pierde energía a través de interacciones con electrones orbitales del absorbente, se desprecian las interacciones elásticas e inelásticas con los núcleos del absorbente.

La teoría de Bohr considera colisiones cercanas (duras) y distantes (suaves). Las colisiones duras se consideran como una interacción de una partícula masiva con un electrón individual, análogo a la dispersión de Rutherford, mientras que en las colisiones suaves se toma en cuenta la energía de enlace de los electrones a través de la frecuencia clásica de resonancia del electrón. La potencia de frenado se calcula como la suma de la potencia de frenado de colisión suave más la potencia de frenado de colisión dura.

2.1. Potencia de Frenado Colisión Dura

La colisión dura se trata como una interacción coulombiana entre una partícula masiva y un electrón, o sea una colisión de Rutherford. Una partícula de carga ze y masa M colisiona con un electrón en un átomo. Si la partícula se mueve rápido comparado con la velocidad característica de un electrón en su órbita, durante la colisión el electrón puede ser tratado como libre e inicialmente en reposo. Como aproximación, suponemos que la transferencia de momento Δp es lo suficientemente pequeña, por lo que la trayectoria de

2.1. Potencia de Frenado Colisión Dura

la partícula incidente antes y después de la colisión es una línea recta y el electrón no retrocede una distancia apreciable durante la colisión. Entonces, para encontrar la energía transferida durante la colisión, solo debemos calcular el impulso causado por el campo eléctrico de la partícula incidente en la posición del electrón. La geometría de la colisión se observa en la figura 2.1 [10]. La partícula incidente tiene una velocidad v , pasa cerca a un electrón de carga e y masa $m \ll M$, a una distancia igual al parámetro de impacto b . Para hallar la relación entre el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión θ , calculamos la transferencia de momento lineal Δp entre la partícula masiva y el electrón. La transferencia de momento en dirección paralela a la trayectoria de la partícula masiva es cero, $\int_{-\infty}^{\infty} F_{\parallel} dt = 0$. La componente de la fuerza en la dirección perpendicular a la trayectoria es $F_{\perp} = F \cos \phi$ (figura 2.1), entonces la transferencia de momento al electrón o el impulso sobre el es

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F \cos \phi dt = \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{\cos \phi}{w r^2} d\phi, \quad (2.3)$$

donde ϕ es el ángulo entre el radio vector r y el bisector de la hipérbola y $\frac{dt}{d\phi}$ es el inverso de la frecuencia angular del electrón, o sea $w = d\phi/dt = v/r$. La frecuencia angular w puede ser expresada como una función del parámetro de impacto b , la velocidad inicial de proyectil v y el radio vector r , usando la conservación del momento angular se halla que

$$w = \frac{v b}{r^2}. \quad (2.4)$$

Reemplazando en la ecuación (2.3) obtenemos la transferencia de momento al electrón

$$\Delta p = \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{v b} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \phi d\phi = 2 \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{v b} \cos \frac{\theta}{2}. \quad (2.5)$$

La ecuación (2.5) es idéntica a la expresión de Rutherford para la transferencia de momento. Sin embargo, para nuestro caso la partícula masiva incidente es un protón, que es mucho más masivo que el electrón, entonces tenemos que el ángulo de dispersión sería $\theta \approx 0$.

Ahora podemos hallar la transferencia de energía por parte de una partícula

masiva a un electrón

$$Q = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = 2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{z^2}{m v^2 b^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.6)$$

Esta expresión se puede reescribir en otra forma mas adecuada que depende solo del parámetro de impacto y no del ángulo de dispersión. En el sistema de referencia donde un electrón de masa m colisiona con una partícula masiva de masa M , usando conservación de la energía podemos calcular la mínima distancia de separación d entre la partícula masiva y el electrón

$$d = 2 \frac{z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}. \quad (2.7)$$

De la figura 2.1 se puede ver que

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{d}{2b}. \quad (2.8)$$

Reemplazamos las ecuaciones (2.7) y (2.8) en (2.6) y obtenemos la transferencia de energía

$$Q = 2 m c^2 r_0^2 \frac{z^2}{\beta^2 b^2} \frac{1}{1 + (d/2b)^2}. \quad (2.9)$$

Cuando una partícula rápida pasa a través de la materia observa electrones en varias posiciones medidas desde su trayectoria rectilinea. Si hay una densidad de electrones $N_e = \frac{\rho N_A Z}{A}$, entonces el número de electrones localizados en una porción cilíndrica de materia de espesor dx y parámetros de impacto entre b y $b + db$ es

$$dn = N_e 2\pi b db dx. \quad (2.10)$$

Para encontrar la energía perdida por la partícula incidente, simplemente multiplicamos la expresión anterior por la energía transferida, ecuación (2.9), e integramos sobre todos los parámetros de impacto

$$\frac{dE}{dx} = -2\pi \frac{\rho N_A Z}{A} 2 m c^2 r_0^2 \frac{z^2}{\beta^2 b^2} \frac{b db}{1 + (d/2b)^2}. \quad (2.11)$$

A la cantidad dE/dx la llamamos la potencia de frenado y si la dividimos por la densidad $dE/\rho dx$ la llamamos la potencia de frenado masa. Definimos

2.1. Potencia de Frenado Colisión Dura

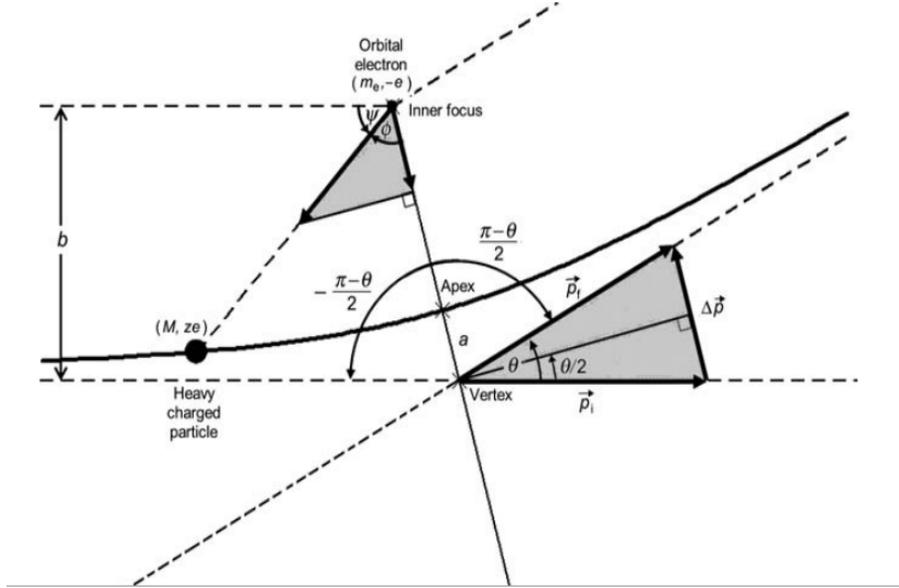


Figura 2.1: Geometría de la interacción entre una partícula masiva y un electrón estacionario. La trayectoria de la partícula masiva es una línea recta, en este caso se dibuja exagerada para ver mejor los ángulos. Figura tomada de la referencia [10]

la constante $C_0 = 4\pi N_A r_0^2 m c^2 = 0.3071 \frac{\text{MeVcm}^2}{\text{mol}}$. Con esto nos queda la potencia de frenado masa

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx}\right) = C_0 \left(\frac{Z}{A}\right) \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \int_0^{b_0} \frac{b db}{b^2(1 + (d/2b)^2)}, \quad (2.12)$$

donde b_0 es el parámetro de impacto en el punto que divide las colisiones suaves de las colisiones duras, llamamos a b_0 impacto-PD. Resolvemos la última integral y nos queda que la potencia de frenado para colisión dura es

$$S_{close} = \left(-\frac{dE}{\rho dx}\right) = \frac{1}{2} C_0 \left(\frac{Z}{A}\right) \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \ln \left(1 + \left(\frac{2b_0}{d}\right)^2\right). \quad (2.13)$$

2.2. Potencia de Frenado Colisión Suave

En una colisión suave tenemos parámetros de impacto más grandes y la partícula incidente interactúa con el átomo completo. El enlace de los electrones de los átomos del absorbente es tomado en cuenta en las colisiones suaves a través de una frecuencia clásica de resonancia w_0 . La variación espacial del campo eléctrico de la partícula pesada a través del diámetro del átomo es ignorada. Consideramos el problema de una partícula cargada masiva con carga ze y velocidad v que interactúa con un electrón armónicamente ligado de carga e y masa m . Como antes, suponemos que la partícula masiva no se desvía de su trayectoria rectilínea y pasa a una distancia b del electrón ligado. Como en este caso nos interesan parámetros de impacto grandes, los efectos de la fuerza de enlace son importantes. Asumimos que la transferencia de energía no es muy grande y que el movimiento de la partícula ligada no es relativista al menos durante la colisión, y que sus amplitudes de oscilación final e inicial alrededor del origen son pequeñas comparadas con el parámetro de impacto b . La variación del campo eléctrico sobre la posición de la partícula ligada se puede despreciar y su valor efectivo se puede tomar en el origen.

Siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior, debemos calcular la energía perdida por el proyectil, que es igual a la energía transferida al electrón. La podemos hallar calculando el trabajo realizado por la partícula incidente sobre el electrón ligado

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{x} = -e \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{E}(t), \quad (2.14)$$

donde \vec{x} es el vector posición del electrón y $\vec{E}(\vec{x}, t) \sim \vec{E}(t)$ es el campo eléctrico del protón, que como dijimos, despreciamos su variación espacial. Suponemos un electrón ligado armónicamente al átomo y que tiene una frecuencia de oscilación w_0 . La fuerza que experimenta el electrón cuando siente el campo eléctrico de la partícula pesada es igual a

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + w_0^2\vec{x} + \Gamma \frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{E}. \quad (2.15)$$

El segundo término de la izquierda corresponde a la fuerza de restauración y el tercero a la constante de amortiguamiento sobre el electrón, que se considera pequeña. El factor de amortiguamiento no es esencial, pero sirve para

simplificar el procedimiento matemático que se llevará a cabo. Para hallar el vector posición \vec{x} debemos resolver la ecuación (2.15). Para esto usamos la transformada de Fourier, para el campo eléctrico \vec{E} y la posición \vec{x} tenemos las siguientes transformadas con sus respectivas derivadas temporales

$$\begin{aligned}\vec{E}(w') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw't} \vec{E}(t) dt, \\ \vec{E}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw't} \vec{E}(w') dw',\end{aligned}\quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw't} \vec{x}(w') dw', \\ \frac{d\vec{x}}{dt} &= -i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w' e^{-iw't} \vec{x}(w') dw', \\ \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} w'^2 e^{-iw't} \vec{x}(w') dw' .\end{aligned}\quad (2.17)$$

Reemplazando (2.16) y (2.17) en la ecuación (2.15) podemos despejar la posición del electrón

$$\vec{x}(w) = -\left(\frac{e}{m}\right) \left(\frac{\vec{E}(w)}{(w_0^2 - w^2) - i\Gamma w}\right). \quad (2.18)$$

Usando la transformada de $d\vec{x}/dt$ (2.17) y de \vec{E} (2.16) y reemplazando en la ecuación (2.14) podemos hallar la transferencia de energía

$$Q = ie \int_{-\infty}^{\infty} w \vec{x}(w) \cdot \vec{E}(-w) dw. \quad (2.19)$$

El campo eléctrico \vec{E} y \vec{x} deben ser reales, entonces $\vec{E}(-w) = \vec{E}^*(w)$ y $\vec{x}(-w) = \vec{x}^*(w)$ y la ecuación anterior queda

$$Q = 2e \operatorname{Re} \left(i \int_0^{\infty} w \vec{x}(w) \cdot \vec{E}^*(w) \right) dw. \quad (2.20)$$

Para obtener la transferencia de energía como una función del campo eléctrico sustituimos la expresión para $\vec{x}(w)$ en el integrando de la ecuación anterior

y nos queda

$$\begin{aligned} Q &= 2 e \operatorname{Re} \left(i \int_0^\infty dw w \left(-\frac{e}{m} \right) \left(\frac{\vec{E}(w) \cdot \vec{E}^*(w)}{(w_0^2 - w^2) - i\Gamma w} \right) \right) \\ &= \frac{2 e^2}{m} \left(\int_0^\infty dw \frac{\Gamma w^2 |\vec{E}(w)|^2}{(w_0^2 - w^2)^2 + \Gamma^2 w^2} \right). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Suponiendo que el amortiguamiento Γ es pequeño, el integrando tiene un pico alrededor de $w = w_0$. Consecuentemente, el factor que involucra el campo eléctrico puede ser aproximado por su valor en $w = w_0$. Entonces la ecuación (2.21) nos queda

$$Q = \left(\frac{2 e^2}{m} \right) |\vec{E}(w_0)|^2 \int_0^\infty dw \frac{\Gamma w^2}{(w_0^2 - w^2)^2 + \Gamma^2 w^2}. \quad (2.22)$$

El resultado de esta última integral es $\pi/2$. Para resolverla hacemos el cambio de variable $u = w/\Gamma$ y usamos polos y residuos. Entonces nos queda la transferencia de energía igual a

$$Q = \left(\frac{\pi e^2}{m} \right) |E(w_0)|^2. \quad (2.23)$$

Esta última ecuación nos da la transferencia de energía al electrón como función del campo eléctrico de la partícula pesada en la posición del electrón. El campo eléctrico en la posición del electrón tiene componentes paralela y perpendicular a la velocidad de la partícula que están dadas por [11]

$$\vec{E}_\parallel = - \left(\frac{z \alpha \hbar c}{e} \right) \frac{\gamma v t}{(b^2 + (\gamma v t)^2)^{3/2}} \hat{v}_\parallel, \quad (2.24)$$

$$\vec{E}_\perp = \left(\frac{z \alpha \hbar c}{e} \right) \frac{\gamma b}{(b^2 + (\gamma v t)^2)^{3/2}} \hat{v}_\perp, \quad (2.25)$$

donde z es la carga de la partícula y $\alpha \hbar c = e^2/4\pi\epsilon_0$. Ahora debemos hallar la transformada de Fourier de estas componentes del campo eléctrico. Para la componente perpendicular del campo tenemos

$$\vec{E}_\perp(w) = \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z \alpha \hbar c}{e b^2} \right) \int_{-\infty}^\infty dt \frac{e^{iwt}}{(1 + (\frac{\gamma v t}{b})^2)^{3/2}} \hat{v}_\perp. \quad (2.26)$$

Hacemos la sustitución

$$x = \gamma v t/b, \quad (2.27)$$

$$\vec{E}_\perp(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z\alpha\hbar c}{ebv} \right) \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\cos\left(\frac{wb}{\gamma v}x\right)}{(1+x^2)^{3/2}} + i \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\text{sen}\left(\frac{wb}{\gamma v}x\right)}{(1+x^2)^{3/2}} \right] \hat{v}_\perp, \quad (2.28)$$

la segunda integral de la derecha se hace cero y la primera por simetría nos queda igual a

$$\vec{E}_\perp(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{z\alpha\hbar c}{ebv} \right) \int_0^{\infty} dx \frac{\cos\left(\frac{wb}{\gamma v}x\right)}{(1+x^2)^{3/2}} \hat{v}_\perp. \quad (2.29)$$

De una tabla de integrales [12] podemos ver que (2.29) corresponde a la función de Bessel modificada de segunda especie de orden 1

$$K_1(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^{\infty} dx \frac{\cos(\xi x)}{(1+x^2)^{3/2}}, \quad (2.30)$$

nos queda que la componente perpendicular es igual a

$$\vec{E}_\perp(w) = \frac{e}{(2\pi)^{3/2}\epsilon_0} \left(\frac{zw}{\gamma v^2} \right) K_1\left(\frac{wb}{\gamma v}\right) \hat{v}_\perp. \quad (2.31)$$

Ahora hallemos la transformada de Fourier de la componente paralela del campo eléctrico haciendo la misma sustitución (2.27) y reemplazamos en (2.24)

$$\vec{E}_\parallel(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{z\alpha\hbar c}{eb\gamma v} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x e^{i\frac{wb}{\gamma v}x}}{(1+x^2)^{3/2}} \hat{v}_\parallel, \quad (2.32)$$

esta integral corresponde a la función de Bessel modificada de segunda especie y orden cero [12]

$$K_0(\xi) = \int_0^{\infty} dx \frac{\cos(\xi x)}{(1+x^2)^{1/2}}, \quad (2.33)$$

nos queda entonces que la componente paralela del campo eléctrico es

$$\vec{E}_\parallel(w) = -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}\epsilon_0} \left(\frac{zew}{(\gamma v)^2} \right) K_0\left(\frac{wb}{\gamma v}\right) \hat{v}_\parallel. \quad (2.34)$$

Con lo anterior podemos calcular el módulo cuadrado del campo eléctrico

$$|\vec{E}(w_0)|^2 = \frac{e^2}{(2\pi)^3 \epsilon_0^2} \left(\frac{zw_0}{\gamma v^2} \right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{w_0 b}{\gamma v} \right) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2 \left(\frac{w_0 b}{\gamma v} \right) \right]. \quad (2.35)$$

En nuestro caso para proyectiles a velocidades no relativistas tenemos que $\gamma = 1$ y nos queda que la transferencia de energía en una colisión suave a un electrón ligado armónicamente es igual a

$$Q = 2 m c^2 r_0^2 \frac{z^2}{\beta^2 b^2} \left[\left(\frac{w_0 b}{v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{w_0 b}{v} \right) + \left(\frac{w_0 b}{v} \right)^2 K_0^2 \left(\frac{w_0 b}{v} \right) \right]. \quad (2.36)$$

Ahora calculamos la potencia de frenado para colisiones suaves

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= -2\pi N_e b Q db \\ &= -4\pi N_e m c^2 r_0^2 \frac{z^2}{\beta^2 b^2} \left[\left(\frac{w_0 b}{v} \right)^2 K_1^2 \left(\frac{w_0 b}{v} \right) + \left(\frac{w_0 b}{v} \right)^2 K_0^2 \left(\frac{w_0 b}{v} \right) \right] b db. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Hacemos el cambio de variable

$$\xi = \frac{w_0 b}{v}, \quad (2.38)$$

y teniendo en cuenta la densidad de electrones N_e y la constante C_0 definidas en la sección anterior podemos expresar la potencia de frenado para colisión suave como

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx} \right) = C_0 \left(\frac{Z}{A} \right) \left(\frac{z}{\beta} \right)^2 \int_{\xi_0}^{\infty} \xi \left[K_1^2(\xi) + K_0^2(\xi) \right] d\xi. \quad (2.39)$$

Para solucionar esta última integral usamos las propiedades de la derivada de $K_0(\xi)$ y $K_1(\xi)$ [12]

$$\begin{aligned} \frac{dK_0(\xi)}{d\xi} &= -K_1(\xi), \\ \frac{dK_1(\xi)}{d\xi} &= -K_0(\xi) - \frac{K_1(\xi)}{\xi}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Nos queda que la potencia de frenado para una colisión suave es

$$S_{dist} = \left(-\frac{dE}{\rho dx} \right) = C_0 \left(\frac{Z}{A} \right) \left(\frac{z}{\beta} \right)^2 \left[\frac{w_0 b_0}{v} K_0 \left(\frac{w_0 b_0}{v} \right) K_1 \left(\frac{w_0 b_0}{v} \right) \right]. \quad (2.41)$$

2.3. Potencia de Frenado Total

La potencia de frenado total se obtiene sumando la potencia de frenado para colisiones suaves y duras, es decir, sumando las ecuaciones (2.41) y (2.13), $S_{total} = S_{close} + S_{dist}$. La evaluación de Bohr se basa en el hecho de que, a altas velocidades donde $d \ll v/w_0$, se puede encontrar un valor de b_0 tal que $d \ll b_0 \ll v/w_0$. En este caso las funciones de Bessel pueden ser representadas por sus expansiones para pequeños argumentos

$$K_0(\xi) \approx \ln\left(\frac{2e^{-\gamma}}{\xi}\right), \quad 0 < \xi \ll 1, \quad (2.42)$$

donde $\gamma = 0.5772$ es la constante de Euler.

$$K_1(\xi) \approx \frac{1}{\xi}, \quad 0 < \xi \ll \sqrt{2}. \quad (2.43)$$

Entonces nos queda la siguiente aproximación

$$\xi K_0(\xi) K_1(\xi) \approx \ln\left(\frac{2e^{-\gamma}}{\xi}\right). \quad (2.44)$$

Con esta aproximación, las ecuaciones (2.41) y (2.13) quedan respectivamente como

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx}\right) = C_0 \left(\frac{Z}{A}\right) \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \ln\left(\frac{2v e^{-\gamma}}{b_0 w_0}\right), \quad (2.45)$$

$$\left(-\frac{dE}{\rho dx}\right) = C_0 \left(\frac{Z}{A}\right) \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \ln\left(\frac{2b_0}{d}\right). \quad (2.46)$$

Sumando (2.45) y (2.46) obtenemos la potencia de frenado total

$$S_{total} = \left(-\frac{dE}{\rho dx}\right) = C_0 \left(\frac{Z}{A}\right) \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 \ln\left(\frac{1.123 \beta^3 c}{w_0 r_0 z}\right), \quad (2.47)$$

donde w_0 es la frecuencia natural de oscilación del electrón y r_0 el radio clásico del electrón. La forma como estimamos el valor de la frecuencia natural del electrón fue con la siguiente ecuación

$$w_0 = \frac{13.6 \text{ (eV)} Z}{\hbar}, \quad (2.48)$$

donde Z es el número atómico del absorbente y $\hbar = 6.582 \times 10^{-16}$ eV s es la constante de Planck.

En su artículo “On the Theory of the Decrease of Velocity of Moving Electrified particles on Passing Through Matter ” [2], Bohr obtuvo la expresión (2.47) para la potencia de frenado de un material. La teoría cuántica de Bethe de la potencia de frenado de una partícula cargada en un absorbente, resulta en una expresión muy similar, donde la principal diferencia es la parte logarítmica, que en la fórmula mecánico cuántica de Bethe sin las correcciones de capas, de densidad y relativistas corresponde a $\ln(2 m v^2/I)$, los otros términos son iguales. En la teoría de Bethe, I es la energía media de excitación, que se reduce a $\hbar\omega_0$ en el caso de una frecuencia de resonancia dominante en la teoría clásica de Bohr.

Capítulo 3

Modificación de la Teoría de Bohr

3.1. Falla de la Teoría de Bohr a Bajas Energías

Para verificar la validez de la teoría de Bohr se hace una comparación entre la predicción teórica de la ecuación (2.47) y los datos experimentales del NIST [13]. Tomamos el aluminio como ejemplo, pero toda la discusión es válida para otros materiales en una manera cualitativa. La figura 3.1 es la comparación para el aluminio. En este capítulo limitamos la discusión al protón.

Se puede observar de la figura que la teoría de Bohr se comporta razonablemente bien para energías $E_p > 0.15$ MeV, pero hay una discrepancia grande para $E_p < 0.1$ MeV debido a la repentina caída de la curva teórica alrededor de $E_p = 0.1$ MeV. Esta discrepancia se mantiene para todos los materiales, sin embargo, el valor de E_p para el cual cae la curva teórica varía un poco de un material a otro.

La razón de la repentina caída de la potencia de frenado cuando $E_p \approx 0.1$ MeV proviene de la aproximación (ecuación (2.44)) de las funciones de Bessel que realizó Bohr en su teoría. En la figura 3.2 mostramos la gráfica correspondiente al valor exacto (lado izquierdo de la ecuación (2.44)) y a la aproximación para pequeños argumentos (lado derecho de la misma ecuación). ξ se definió en la ecuación (2.38). Se observa que la aproximación de la ecuación (2.44) solo es válida para valores pequeños de $\xi \leq 0.8$, que corres-

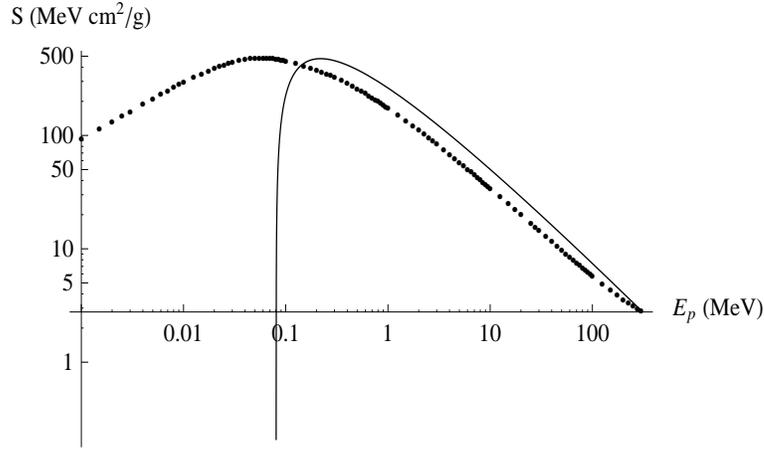


Figura 3.1: Potencia de frenado de Bohr: en línea sólida la predicción teórica, en línea punteada los datos experimentales.

ponde a una energía $E_p \approx 0.15$ MeV en el caso del aluminio. Cuando E_p es menor que 0.1 MeV, el valor de ξ es mucho mayor que 1, así el lado derecho de la ecuación (2.44) toma valores negativos, lo que resulta en la rápida caída de la potencia de frenado que se observa en la figura 3.1.

Además, con la aproximación de la ecuación (2.44) se cancela el parámetro de impacto b_0 cuando se suman las potencias de frenado S_{close} y S_{dist} y entonces la expresión final de la potencia de frenado no depende de b_0 . En la teoría de Bohr el parámetro b_0 , el impacto-PD, es el que divide las colisiones suaves de las duras, es un parámetro importante de la teoría, pero en su expresión final no aparece, este también es un problema fundamental de la teoría.

3.2. Modificación de la Teoría de Bohr

Se ha notado de tiempo atrás [7] que para partículas pesadas (como iones y protones) y energías bajas, la fórmula de Bohr es un mejor punto de partida para predicciones teóricas de la potencia de frenado que la teoría de Bethe. Además, la energía $E_p \approx 0.1$ MeV es de interés para aplicaciones en medicina nuclear. Entonces todavía es relevante una mejora de la fórmula de Bohr. Históricamente se han hecho muchos intentos para mejorar esta teoría,

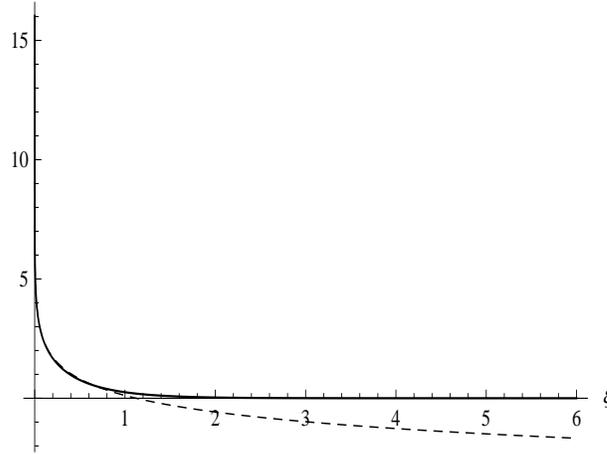


Figura 3.2: Aproximación de S_{dist} La línea solida corresponde al lado de izquierdo de la ecuación (2.44) y la línea punteada a la aproximación.

aquí solamente mencionamos dos de los más recientes. P. Sigmund [14] propone la condición $Q_{close} = Q_{dist}$ para determinar b_0 . De esta manera evita la caída repentina de la curva S_{total} . Sin embargo, la predicción de la teoría modificada tiene una discrepancia considerable con los datos [14], y además la condición $Q_{close} = Q_{dist}$ es un poco arbitraria y no tiene una base física. Otra modificación realizada por M. M. Basko [15] propone una fórmula fenomenológica muy compleja y su validez todavía necesita ser verificada por comparación con datos experimentales.

En este trabajo nosotros intentamos hacer una modificación reexaminando la suposición de Bohr que los electrones en el medio de frenado están quietos. Primero recordamos la definición de b_0 hecha por Bohr. Un punto de partida para la definición de b_0 es la ecuación (2.9). Suponemos que para las colisiones duras la transferencia de energía cumple que $Q \geq I$, donde Q es la transferencia de energía del protón al electrón e I es la energía media de excitación. Para colisiones suaves $Q < I$. Entonces para colisiones duras, podemos hallar la siguiente ecuación

$$b \leq \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \sqrt{\frac{M}{m} \left(\frac{1}{I} - \frac{M}{4mE_p} \right) \frac{1}{E_p}}, \quad (3.1)$$

donde M y E_p son la masa y la energía cinética del protón respectivamente, I es la energía media de excitación del material, e y m son respectivamente la carga y la masa del electrón. Debido a la compleja situación de los electrones dentro de los átomos, la energía media de excitación I es una aproximación cruda, por eso la teoría de Bohr es por naturaleza una teoría fenomenológica. Esta ecuación define el impacto-PD, b_0 , entre una colisión suave y una colisión dura cuando se cumple la igualdad. De la anterior ecuación se puede ver que cuando $E_p < \frac{M}{4m} I$, el parámetro de impacto b es imaginario y por lo tanto la potencia de frenado no tendría sentido. Para el aluminio, con $I = 167$ eV y w_0 calculado con la ecuación (2.48), obtenemos para b_0 el resultado que se muestra en la figura 3.3.

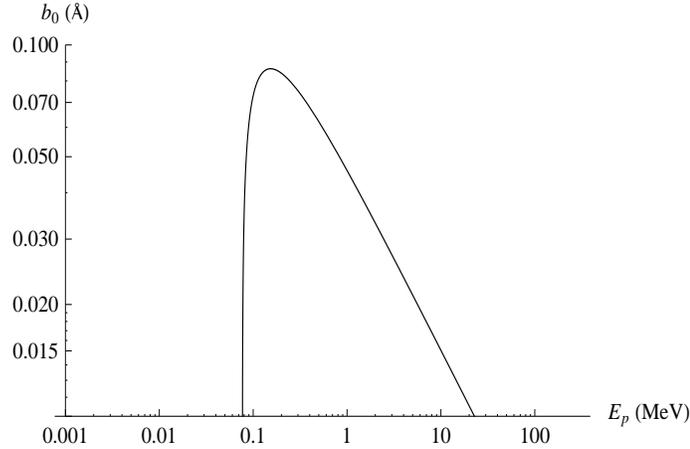


Figura 3.3: Gráfica del impacto-PD para el aluminio.

De la anterior figura se observa la caída abrupta del parámetro b_0 para valores de $E_p < 0.16$ MeV.

La aproximación en la ecuación (2.44) causa la falla de la teoría de Bohr a bajas energías, sin embargo, la misma aproximación esconde el problema de la ecuación (3.1) para una energía $E_p \approx 0.09$ MeV, lo que también es un problema de la teoría de Bohr.

Nuestra modificación de la teoría de Bohr se basa en la suposición de que el problema de dicha teoría a bajas energías E_p es debido a que se desprecia el movimiento de los electrones en la materia. Aunque despreciar el movimiento

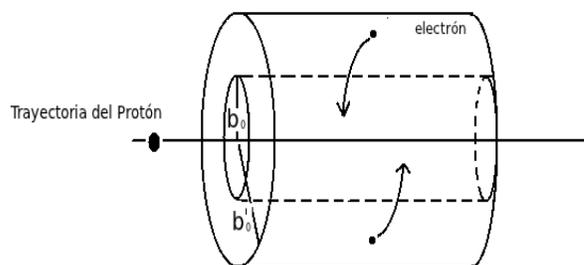


Figura 3.4: Como el movimiento del electrón agranda la zona cercana.

de los electrones no causa serios problemas a altas energías E_p , se encuentran problemas cuando E_p es baja. Ya que un protón con baja E_p (baja velocidad) le toma mas tiempo atravesar un átomo, los electrones en el átomo tendran oportunidad de estar mas cercanos al protón, esto tendra consecuencias adicionales no consideradas en la aproximación de Bohr. Nosotros ilustramos este punto en la figura 3.4, donde la línea recta en el centro representa la trayectoria del protón. b_0 es el parámetro de impacto-PD, nosotros llamamos el cilindro con $b < b_0$ la “zona cercana”, donde todos los electrones tendran una colisión cercana con el protón (por la teoría de Bohr). El espacio fuera de este cilindro es la “zona distante”. Debido al movimiento, los electrones en la zona distante pueden moverse a la zona cercana. Por eso nosotros podemos pensar que los electrones en el cilindro con $b > b_0$ se pueden mover a la zona cercana durante un intervalo de tiempo τ cuando el protón está atravesando el átomo. Esto corresponde a un incremento del parámetro impacto-PD de b_0 a b'_0 , y la magnitud del aumento depende del intervalo de tiempo τ (o de la energía del protón E_p). Con el fin de convencernos de que el argumento de arriba es razonable, nosotros hacemos una estimación de la velocidad del protón y del electrón para el aluminio. La velocidad del protón con $E_p = 0.1$ MeV es $v_p = 0.015c$, mientras que la velocidad del electrón es $0.032c$, $0.047c$ y $0.095c$ para las capas M , L y K respectivamente. Durante el periodo de tiempo τ para el cual el protón atraviesa el átomo, cada electrón puede pasar por la zona cercana varias veces. Si la energía E_p es más baja hay mas probabilidad de que los electrones lleguen a la zona cercana y asi b'_0 es mas grande.

Debido a que el movimiento del electrón es muy complicado, es muy difícil calcular el incremento del parámetro b_0 de una forma cuantitativa. En vez

de eso, nosotros buscamos una forma fenomenológica. Nosotros proponemos una nueva fórmula para el parámetro de impacto-PD, b_0 , que es

$$b_0 = \alpha \left[\left(\frac{1}{E_p} \right)^{1/\beta} + \beta \right], \quad (3.2)$$

donde E_p es un número que es igual a la energía del protón en MeV, α y β son parámetros ajustables, mientras que β es un número, α es una cantidad con dimensiones de longitud (\AA). La forma del argumento, $1/E_p$, está basada en la discusión de arriba: cuando v_p es más baja, b_0 se incrementa mas. La validez de esta fórmula será chequeada por comparación con el experimento.

3.3. Test de la Fórmula Fenomenológica

Para probar la fórmula fenomenológica (3.2) hacemos una comparación entre las predicciones teóricas y los datos experimentales obtenidos del NIST [13]. En los cálculos teóricos utilizamos las mismas ecuaciones de Bohr (2.13) y (2.41), pero empleamos nuestra fórmula fenomenológica de impacto-PD (3.2). Como medio absorbente, o sea el medio a través del cual viaja el protón, escojemos hidrógeno (H), carbono (C), oxígeno (O), aluminio (Al), hierro (Fe), cobre (Cu) y plomo (Pb), donde el número atómico Z varia entre 1 y 82 y se incluyen materiales de diferente tipo y con diferentes propiedades.

3.3.1. Comparación Entre la Teoría y el Experimento

1. Aluminio.

Para el aluminio, la gráfica del parámetro impacto-PD, b_0 , como función de la energía del protón incidente E_p se muestra en la figura 3.5.

Aunque nuestra motivación es modificar la teoría de Bohr para bajas energías E_p , probamos la validez de la ecuación (3.2) para un rango de energías E_p entre 0.001 MeV y 300 MeV, que es un rango de energía de interes en medicina nuclear. De la figura 3.5 cuando $E_p \rightarrow 0.001$ MeV el parámetro $b_0 \rightarrow 0.90\text{\AA}$. La potencia de frenado obtenida para el aluminio se muestra en la figura 3.6, de aquí en adelante, todas las figuras están en forma Log-Log, es decir, los ejes horizontal y vertical usan escala logarítmica.

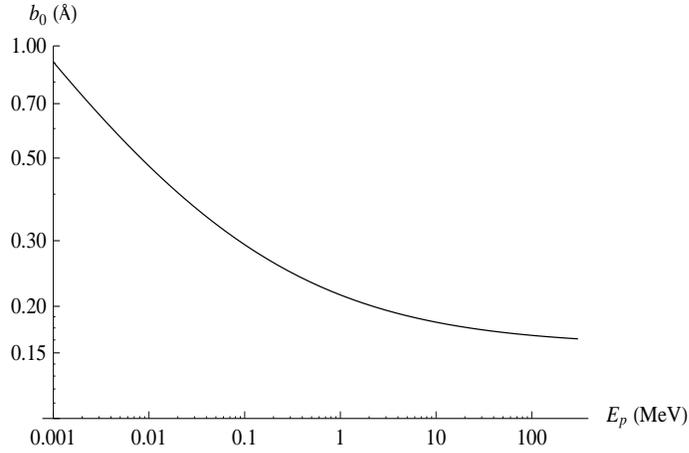


Figura 3.5: Parámetro de impacto- PD , calculado con la ecuación (3.2).

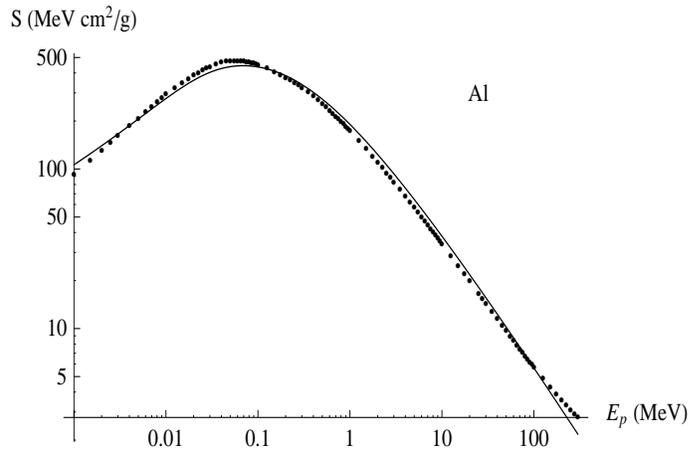


Figura 3.6: Gráfica de la potencia de frenado masa del aluminio. La curva sólida muestra los resultados obtenidos con la ecuación (3.2) y la curva punteada los resultados experimentales del NIST [13].

Se puede observar que el resultado teórico tiene una excelente concordancia con el resultado experimental. Es sorprendente para nosotros que no solo para $E_p < 0.1$ MeV sino también para energías más altas (hasta $E_p \approx 300$ MeV), la sencilla fórmula fenomenológica produce muy buenos resultados. Los paráme-

tros para el aluminio son $\alpha = 0.058 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$.

2. Carbono.

Los resultados obtenidos para el carbono con la ecuación (3.2) se muestran en la figura 3.7. Los parámetros son $\alpha = 0.068 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$. La concordancia también es excelente para todo el rango de energías entre 0.001 MeV y 300 MeV.

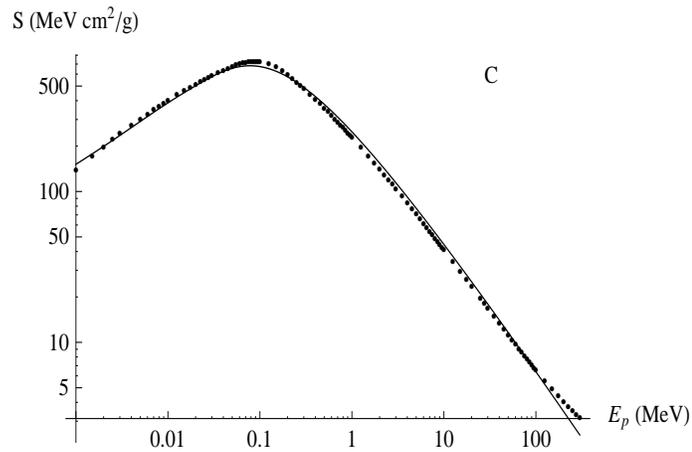


Figura 3.7: Gráfica de la potencia de frenado masa del carbono. Para mas detalles ver comentarios de la figura 3.6.

3. Oxígeno.

Los resultados obtenidos para el oxígeno con la ecuación (3.2) se muestran en la figura 3.8. Los parámetros son $\alpha = 0.058 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$. La concordancia entre la teoría y el experimento es excelente, excepto que cerca de $E_p \approx 0.1 \text{ MeV}$ hay una pequeña discrepancia.

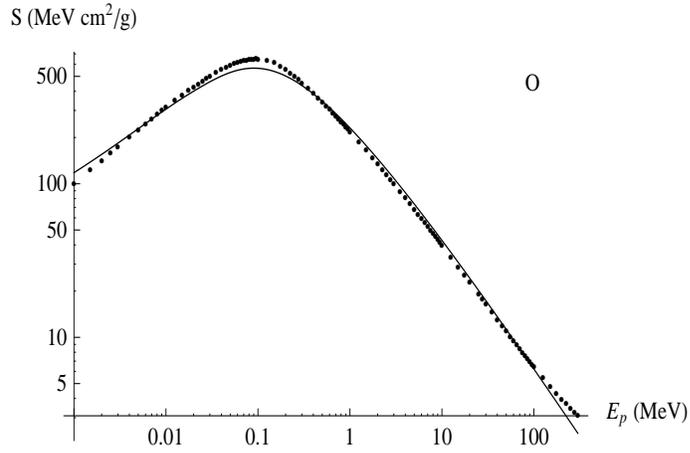


Figura 3.8: Gráfica de la potencia de frenado masa del oxígeno. Para mas detalles ver comentarios de la figura 3.6.

4. Hierro.

Los resultados obtenidos para el hierro con la ecuación (3.2) se muestran en la figura 3.9. Los parámetros son $\alpha = 0.038 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$. Hay un poco de discrepancia entre la teoría y el experimento para un rango de energías entre 0.1 MeV y 10 MeV.

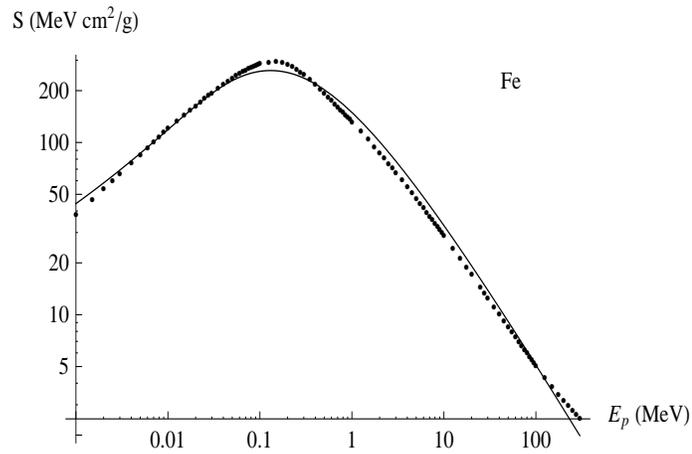


Figura 3.9: Gráfica de la potencia de frenado masa del hierro. Para mas detalles ver comentarios de la figura 3.6.

5. Cobre.

Los resultados obtenidos para el cobre con la ecuación (3.2) se muestran en la figura 3.10. Los parámetros son $\alpha = 0.035 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$. Hay una excelente concordancia para energías muy altas y muy bajas, pero existe una pequeña discrepancia para energías entre 0.1 MeV y 10 MeV.

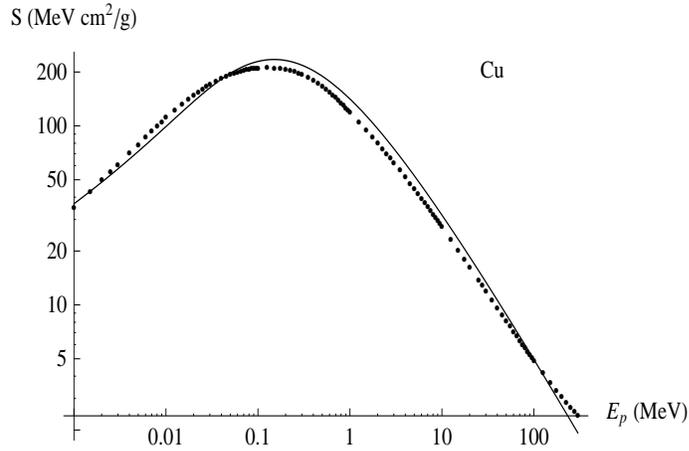


Figura 3.10: Gráfica de la potencia de frenado masa del cobre. Para mas detalles ver comentarios de la figura 3.6.

6. Plomo.

Los resultados obtenidos para el plomo con la ecuación (3.2) se muestran en la figura 3.11. Los parámetros son $\alpha = 0.026 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$. Hay una excelente concordancia para energías muy altas y muy bajas, pero existe una discrepancia considerable para energías entre 0.1 MeV y 10 MeV.

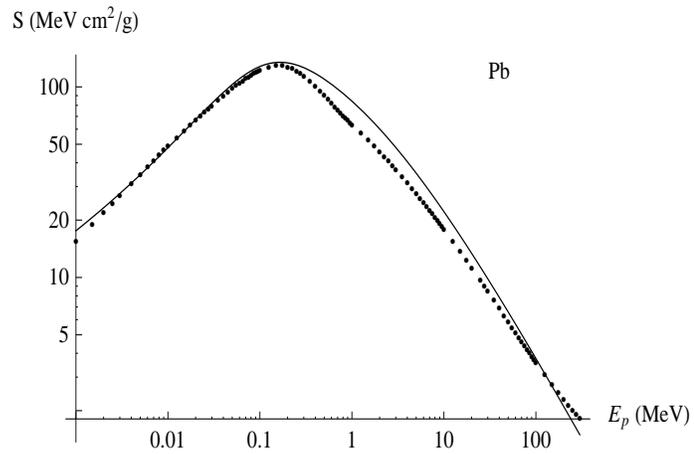


Figura 3.11: Gráfica de la potencia de frenado masa del plomo. Para mas detalles ver comentarios de la figura 3.6.

7. Hidrógeno.

Los resultados obtenidos para el hidrógeno con la ecuación (3.2) se muestran en la figura 3.12. Los parámetros son $\alpha = 0.123 \text{ \AA}$ y $\beta = 2.7$. Hay una excelente concordancia para energías $E_p > 0.1 \text{ MeV}$, pero existe una discrepancia para energías $E_p < 0.1 \text{ MeV}$.

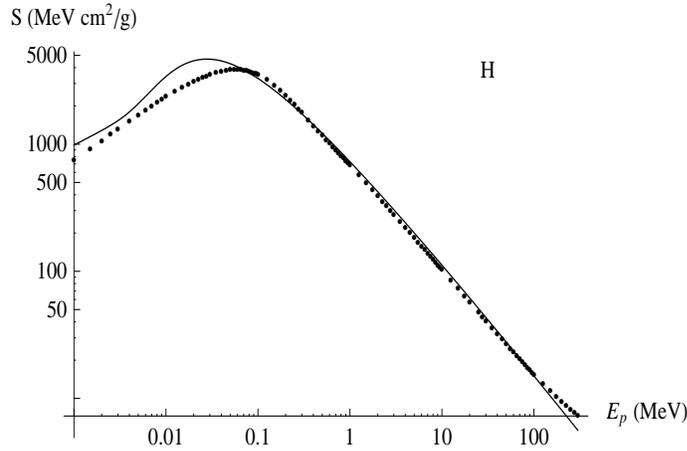


Figura 3.12: Gráfica de la potencia de frenado masa del hidrógeno. Para mas detalles ver comentarios de la figura 3.6.

3.3.2. Discusión

Se puede ver que los resultado calculados con la fórmula fenomenológica (3.2) para los materiales Al, C, O, Fe, Cu concuerdan generalmente muy bien con los datos experimentales. En el caso del plomo, la concordancia es muy buena para $E_p < 0.1$ MeV, pero hay una discrepancia entre 0.1 MeV y 100 MeV. Para el hidrógeno existe una discrepancia considerable entre la teoría y el experimento para $E_p < 0.1$ MeV.

Hacemos un resumen de los parámetros α y β en la tabla 3.1. Como ya dijimos, el valor de β que hallamos fue constante para todos los elementos e igual a 2.7.

Nuestra motivación original de modificar la teoría de Bohr fue solo para una región de bajas energías ($E_p < 0.1$ MeV), sin embargo, la fórmula fenomenológica (3.2) funciona tambien para energías E_p hasta 300 MeV. La interpretación de la fórmula (3.2) y sus parámetros se encuentra aún en desarrollo. A primera vista, se puede ver que el término dentro del paréntesis de (3.2) refleja que $b_0 \sim f(1/v)$, que es una asunción que se puede derivar de los argumentos mostrados en la figura 3.4. El segundo término dentro del paréntesis (la constante β) mantiene a b_0 a un valor constante para altas energías del protón E_p . Sin embargo, es muy misterioso que el segundo término del lado derecho de la ecuación (3.2) sea igual al inverso del exponente del primer

	H	C	O	Al	Fe	Cu	Pb
α (Å)	0.123	0.068	0.060	0.058	0.038	0.035	0.026
β	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7
b_0 (Å)	0.62	0.34	0.30	0.29	0.19	0.17	0.13
radio atómico (Å)	0.53	0.67	0.60	1.18	1.558	1.45	1.54

Cuadro 3.1: Parámetros α y β para el Hidrógeno, Carbono, Oxígeno, Aluminio, Hierro, Cobre y Plomo. b_0 se calcula con $E_p = 0.1$ MeV. El radio atómico es para referencia.

término.

La constante α es el único parámetro que varía. En la tabla 3.1 se puede ver una dependencia de α con Z , parece que es razonable asumir que α refleja de alguna forma el tamaño del átomo. Nosotros extenderemos la comparación a mas tipos de materiales, incluyendo materiales compuestos, con el fin de buscar una interpretación de la fórmulas (3.2) y sus parámetros.

Capítulo 4

Conclusiones

La teoría de Bohr sobre la potencia de frenado de partículas pesadas es una teoría clásica, pero todavía sigue siendo de interés en el estudio de interacción de la radiación con la materia. La fórmula de Bohr da una predicción razonable para altas energías de la partícula pesada, pero tiene una falla fatal con $E_p < 0.1\text{MeV}$ debido a la repentina caída de la potencia de frenado causada por la aproximación de la ecuación (2.44).

Nuestra modificación de la fórmula de Bohr esta basada en el argumento de que los electrones en la materia están en constante movimiento. Para bajas energías del protón, por ejemplo $E_p \leq 0.15\text{ MeV}$, debido al movimiento lento del protón, estos electrones distantes se mueven hacia el protón y colisionan con el, así aumenta el límite del parámetro de impacto-PD, que es la frontera de impacto entre colisiones distantes y cercanas. Cuando mas baja es E_p , mayor será el valor de b_0 . Basados en este argumento proponemos la fórmula fenomenológica (3.2) para b_0 , con esta fórmula obtenemos resultados buenos para la potencia de frenado de diferentes materiales. El rango de energías de los protones usados como proyectiles fue entre 0.001 MeV y 300 MeV, que es el rango de energías de interés para aplicaciones de medicina nuclear.

Otros autores han realizado correcciones a la fórmula de Bohr para la potencia de frenado [14], pero los resultados obtenidos no han sido tan buenos como los que se obtienen en el presente trabajo, además sus tratamientos son mas complicados. Para chequear la validez de nuestra modificación de la teoría de Bohr, extenderemos la comparación a mas tipos de materiales, incluyendo materiales compuestos. Al mismo tiempo, buscaremos una inter-

Capítulo 4. Conclusiones

pretación física de los parámetros, probablemente en relación con el tamaño del átomo.

Bibliografía

- [1] M. SKLODOWSKA CURIE, *Compt. Rend. Acad. Sci.* 130, 76 (1900).
- [2] N. BOHR, *Philos. Mag.* 25, 10 (1913).
- [3] H. BETHE, *Ann. Physik.* 5 (5), 335-400 (1930).
- [4] F. BLOCH, *Ann. Physik.* 16 , 285 (1933).
- [5] C. MØLLER, *Ann. Physik.* 5, 531 (1932)
- [6] N. BOHR, *Math. Fysiske.* XVIII (8), 1 (1948).
- [7] U. FANO, *Ann. Rev. Nucl. Sci.* 13, 1 (1963).
- [8] S. AHLÉN, *Rev. Mod. Phys.* 52 (1), 121-173 (1980).
- [9] M. INOKUTI, *Rev. Mod. Phys.* 43 (3), 297-347 (1971).
- [10] E. PODGORSK, *Radiation Physics for Medical Physicists*, Springer, 2010.
- [11] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics (430-462)*, John Wiley & Sons, 1962.
- [12] M. ABRAMOWITZ, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, 1972.
- [13] M. J. BERGER, J. S. COURSEY, M. A. ZUCKER, J. CHANG, *Stopping Power and Range Tables for Electrons, Protons and Helium Ions (online)*, disponible en la web: <http://www.nist.gov/pml/data/star/index.cfm>
- [14] P. SIGMUND, *Phys. Rev. A* 54, 3113 (1996).

- [15] M. BASKO, *Eur. Phys. J. D* 32, 9-17 (2005).
- [16] H. PAGANETTI, B. GOTTSCHALK, *Proton Therapy Physics*, CRC Press, 2011.
- [17] A. JAVANAINEN, W. TRZASKA, R. HARBOE, A. VIRTANEN, G. BERGER AND W. HAJDAS, *IEEE Trans. on Nucl. Sci.* 57 (4), 1946-1949 (2010).
- [18] B. J. MCPARLAND, *Nuclear Medicine Radiation Dosimetry*, Springer, 2010.
- [19] F. H. ATTIX, *Introduction to Radiological Physics and Radiation Dosimetry*, Wiley-VCH, 2004.
- [20] K. S. KRANE, *Introductory Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, 1988.
- [21] R. D. EVANS, *The Atomic Nucleus(567-589)*, McGraw-Hill, 1955.
- [22] J. E. TURNER, *Atoms, Radiation and Radiation Protection*, Wiley-VCH, 2007.
- [23] F. A. SMITH, *A Primer in Applied Radiation Physics*, World Scientific, 2000.
- [24] J. E. TURNER, *Health Phys. P. P.* 13, 1255-1263 (1967).